Koordinaten und darstellende Matrizen

Olivier Sète

14. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Koordinatenabbildung

Ziel: Von einem beliebigen (abstrakten) endlichdimensionalen K-Vektorraum in den (konkreteren) K-Vektorraum K^n wechseln, da man dort leichter rechnen kann (viele Hilfsmittel).

1.1 Definition und Eigenschaften

Sei K ein Körper (zum Beispiel $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, aber es funktioniert für jeden erdenklichen Körper!), und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = n$.

Bekanntlich existieren dann Basen, und wir wählen eine aus: Sei

$$\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

(in dieser Reihenfolge) eine K-Basis von V.

Dann gilt: für jedes $v \in V$ existieren Koeffizienten $\alpha_j \in K, 1 \leq j \leq n$, so dass sich v als Linearkombination der v_j darstellen lässt:

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j.$$

Die Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ heißen *Koordinaten* von v (bezüglich $\mathfrak{B}$). Schreibt man $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ als Vektor, nennt man das den *Koordinatenvektor* von v.

Wichtig: da $\mathfrak{B}$ eine Basis ist, sind die α_j eindeutig durch das v bestimmt.

Daher können wir eine Abbildung definieren, die dem v die α_j, genauer den Koordinatenvektor, zuordnet. Das ist die sogenannte *Koordinatenabbildung* $\Phi_{\mathfrak{B}}$ (bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$):

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathfrak{B}} : V &\longrightarrow K^n \\ v &\longmapsto \Phi_{\mathfrak{B}}(v) := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}} \end{aligned}$$

Achtung: $\Phi_{\mathfrak{B}}$ hängt natürlich von der Wahl der Basis ab. Eine andere Basis definiert eine andere Koordinatenabbildung.

Der Index $\mathfrak{B}$ am Vektor in K^n soll andeuten, dass es sich um Koordinaten bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$ handelt. Dies dient nur der Übersicht (wo lebt dieses Objekt?), und wird natürlich meistens weggelassen. Wir wollen ihn aber erstmal mitnehmen, da die Koordinaten eben von der Wahl der Basis abhängen.

Man kann zeigen, dass $\Phi_{\mathfrak{B}}$ ein *Vektorraumisomorphismus* zwischen V und K^n ist (d.h. $\Phi_{\mathfrak{B}}$ ist ein bijektiver Vektorraumhomomorphismus).

Dieser Sachverhalt wird oft ausgenutzt, um ein Problem von einem „abstrakten“ Vektorraum V ein den „konkreten“ Matrizenvektorraum K^n zu übersetzen, da zu lösen, und dann zurückzurechnen (z.B. um den Kern von linearen Abbildungen zu berechnen).

1.2 Beispiel

Betrachte $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$, den Raum der Polynome in t über $\mathbb{C}$ vom Grad kleiner gleich 3, als $\mathbb{C}$-Vektorraum. Es ist

$$\mathbb{C}[t]_{\leq 3} = \left\{a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 1 \middle| a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}\right\}.$$

Dann ist $\mathfrak{B} = \left\{1, t, t^2, t^3\right\}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ (dies ist die sogenannte kanonische Basis).

Dann sieht die Koordinatenabbildung $\Phi_{\mathfrak{B}}$ bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$ so aus:

$$\Phi_{\mathfrak{B}}\left(a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 1\right) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}}.$$

Um einmal an einem Beispiel zu sehen, dass sich Koordinaten bezüglich verschiedener Basen unterscheiden, betrachten wir eine weitere Basis $\widetilde{\mathfrak{B}} = \left\{1, 1+t, t^2, t^3\right\}$. Bezeichnet $\Phi_{\widetilde{\mathfrak{B}}}$ die zu dieser Basis gehörige Koordinatenabbildung, so folgt

$$\begin{aligned} \Phi_{\widetilde{\mathfrak{B}}}\left(a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 1\right) &= \Phi_{\widetilde{\mathfrak{B}}}\left(a_3t^3 + a_2t^2 + a_1(1+t) + (a_0 - a_1)1\right) \\ &= \begin{bmatrix} a_0 - a_1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{\widetilde{\mathfrak{B}}}. \end{aligned}$$

Wir stellen fest: die Koordinatenvektoren des Polynoms sind bezüglich verschiedener Basen ($\mathfrak{B}$ und $\widetilde{\mathfrak{B}}$) verschieden.

Andersherum kann es sein, dass Koordinatenvektoren bezüglich verschiedener Basen gleich aussehen, aber verschiedene Vektoren darstellen. Zum Beispiel ist

$$\Phi_{\mathfrak{B}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\widetilde{\mathfrak{B}}} = \Phi_{\widetilde{\mathfrak{B}}}(1+t),$$

von daher sind die Koordinatenvektoren nicht gleich, auch wenn es die selben 4×1-Matrizen sind. □

2 Matrixdarstellung eines Vektorraumhomomorphismus

Ziel: Beschreibe eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen als Matrix, da man für Matrizen sehr gute Rechenverfahren hat (auch computertaugliche!). Z.B. lässt sich ein Kern dann als Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems berechnen, wo man den Gauß-Algorithmus anwenden kann.

2.1 Berechnung einer darstellenden Matrix

Sei K ein Körper und V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim_K(V) = n$, $\dim_K(W) = m$ und $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine K-Basis von V, $\mathfrak{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine K-Basis von W.

Sei $f : V \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus (=lineare Abbildung).

Berechne die Bilder $f(v_j)$ der Basisvektoren v_j von V. Da $\forall 1 \leq j \leq n : f(v_j) \in W$, lässt sich $f(v_j)$ in der Basis $\mathfrak{B}_W$ von W darstellen. D.h. es existieren eindeutige Elemente $a_{ij} \in K$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ mit

$$\begin{aligned}
f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m \\
f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m \\
&\vdots \\
f(v_j) &= a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \ldots + a_{mj}w_m \\
&\vdots \\
f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m
\end{aligned}$$

Dabei sind die Koeffizienten a_{ij} die Koordinaten von $f(v_j)$, genauer ist $\begin{bmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \ldots & a_{mj} \end{bmatrix}^T_{\mathfrak{B}_W}$ der Koordinatenvektor von $f(v_j)$.
Möchte man dies mit der Koordinatenabbildung schreiben, sieht dies so aus:

$$\Phi_{\mathfrak{B}_W}(f(v_j)) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_W} .$$

Dann ist die darstellende Matrix $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)$ von f bezüglich den Basen $\mathfrak{B}_V$ und $\mathfrak{B}_W$ gegeben durch

$$\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in K^{m,n}.$$

Beachte, dass die Koordinaten von $f(v_1)$ in die erste *Spalte* kommen, die von $f(v_2)$ in die zweite, ...

Nutzt man die Koordinatenabbildung, so kann man dies auch so schreiben:

$$\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f) = \begin{bmatrix} \Phi_{\mathfrak{B}_W}(f(v_1)) & \Phi_{\mathfrak{B}_W}(f(v_2)) & \ldots & \Phi_{\mathfrak{B}_W}(f(v_n)) \end{bmatrix}.$$

Wir haben eben gesehen, dass wir jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ eine eindeutige Matrix $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)$ zuordnen können. Dies können wir als Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W} : L(V, W) &\longrightarrow K^{m,n} \\
f &\longmapsto \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)
\end{aligned}$$

interpretieren (dabei bezeichnet $L(V,W) = \mathrm{Hom}_K(V,W)$ die Menge der linearen Abbildungen von V nach W).

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}$ sogar ein Vektorraumisomorphismus ist.

2.2 Zusammenhang zwischen darstellender Matrix und linearer Abbildung

Frage: Was hat die berechnete Matrix mit der linearen Abbildung f zu tun ?

Wir werden beweisen, dass

$$\begin{aligned} f(v) = w \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)\, \Phi_{\mathfrak{B}_V}(v) = \Phi_{\mathfrak{B}_W}(f(v)) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_V} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_W}, \end{aligned}$$

wobei $v \in V$ und $w := f(v) \in W$, mit Koordinatendarstellung in der jeweiligen Basis:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j =: \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_V} \\ w &= \sum_{j=1}^{m} \gamma_j w_j =: \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_W} \end{aligned}$$

(Dabei ist das hintere formale Matrixprodukt durch die vordere Summe definiert).

D.h. die darstellende Matrix von f bildet die Koordinaten von v auf die Koordinaten von w ab (entsprechend der Basen, die bei der Berechnung von $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)$ benutzt wurden). Anders gesagt macht $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)$ mit den Koordinatenvektoren das, was f mit den Vektoren macht.

In der Tat gilt: Speziell sind die Koordinaten von v_j durch den kanonischen Einheitsvektor e_j gegeben: $\Phi_{\mathfrak{B}_V}(v_j) = e_j$. Also folgt:

$$\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)\, \Phi_{\mathfrak{B}_V}(v_j) = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)\, e_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_W} = \Phi_{\mathfrak{B}_W}(f(v_j))$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_V} &= \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)\, \Phi_{\mathfrak{B}_V}(v) = \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f) \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \beta_j \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)\, e_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \Phi_{\mathfrak{B}_W}(f(v_j)) \\
&= \Phi_{\mathfrak{B}_W}\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j f(v_j) \right) = \Phi_{\mathfrak{B}_W}(f(v)) = \Phi_{\mathfrak{B}_W}(w) \\
&= \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_W}
\end{aligned}$$

Dies zeigt unsere Behauptung.

Damit haben wir geschafft: gehen wir von V und W zu K^n und K^m über (mit den Koordinatenabbildungen, die Isomorphismen sind), können wir die Aktion von f durch eine Matrixmultiplikation beschreiben.

Achtung: Die darstellende Matrix kann immer nur auf Koordinatenvektoren (bzgl. $\mathfrak{B}_V$) angewandt werden (selbst wenn V schon ein K^n ist), und liefert immer nur Koordinatenvektoren (bzgl. $\mathfrak{B}_W$).
Andersherum kann die Abbildung selbst nur auf Vektoren aus V angewandt werden, nicht auf die Koordinatenvektoren (dies wird am Beispiel 2.4 deutlich, siehe unten).

Man stelle sich z.B. vor, dass V und W Polynomvektorräume sind. Was soll dann bitte die Multiplikation einer Matrix mit einem Polynom sein ? Da kommt eine ganze Matrix voller Polynome heraus, nicht ein einzelnes Polynom aus W.

2.3 Mehr Übersicht durch Diagramme

Die bisherigen Resultate können wir in Form eines „Bildes“ darstellen. Dies hat als Vorteil, dass man sich das ganze vielleicht leichter merken kann, und nicht so schnell die Übersicht verliert, in welchem Raum man sich gerade befindet.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_{\mathfrak{B}_V}"'] & W \\
K^n \arrow[r, "\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)"'] & K^m \arrow[u, "\Phi^{-1}_{\mathfrak{B}_W}"']
\end{tikzcd}$$

So ein Bild wird *Diagramm* genannt. Es beschreibt wie die verchiedenen vorhandenen Abbildungen zusammenhängen. Hier haben wir $f, \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f), \Phi_{\mathfrak{B}_V}, \Phi_{\mathfrak{B}_W}$ und die Inverse Koordinatenabbildung $\Phi^{-1}_{\mathfrak{B}_W}$.

Ein Diagramm heißt *kommutativ*, falls folgendes gilt: Können wir einen Punkt im Diagramm auf zwei verschiedene Weisen auf einen anderen Raum abbilden, so sind die Bilder gleich.

Dies ist sicher nicht für jedes Diagramm, was wir aufmalen können, richtig. Beispiel: Ersetze in obigem Diagramm z.B. $\Phi_{\mathfrak{B}_V}$ durch die Konstante Nullabbildung, und betrachte $f \neq 0_{L(V,W)}$. Dann gibt es $v \in V$ mit $f(v) \neq 0_W$, aber $\left(\Phi^{-1}_{\mathfrak{B}_W} \circ \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f) \circ 0_{L(V,K^n)}\right)(v) = 0_W \neq f(v)$.

Damit ist klar, dass nur vom Aufmalen eines Diagramms noch nichts folgt. Eigenschaften müssen immer noch richtig bewiesen werden (auch wenn das gerne mal bei den Leuten wegfällt, die Diagramme oft benutzen).

In unserem Fall ist das Diagramm aber kommutativ. Das haben wir oben nachgerechnet! Und zwar haben wir gesehen, dass $\forall\, v \in V$:

$$\begin{aligned}\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)\,\Phi_{\mathfrak{B}_V}(v) = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)&\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_V} = \begin{bmatrix}\gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_m\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_W} = \Phi_{\mathfrak{B}_W}(w) = \Phi_{\mathfrak{B}_W}(f(v))\\ &= \left(\Phi_{\mathfrak{B}_W} \circ f\right)(v)\,.\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f) \circ \Phi_{\mathfrak{B}_V} = \Phi_{\mathfrak{B}_W} \circ f,$$

und da $\Phi_{\mathfrak{B}_W}$ bijetiv ist, zu

$$\Phi^{-1}_{\mathfrak{B}_W} \circ \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f) \circ \Phi_{\mathfrak{B}_V} = f.$$

Also haben wir es wirklich mit einem kommutativen Diagramm zu tun.

Der Nutzen ist dann, das man immer auf so einem Diagramm schauen kann, in welchem Raum man sich befindet, und wie eben die Abbildungen zusammenhängen. Besonders interessant wird es, wenn man dann noch verschiedene Basen und dazugehörige darstellende Matrizen betrachtet, und wie die untereinander zusammenhängen. Siehe dazu den nächsten Abschnitt.

Am Anfang sind Diagramme gewöhnungsbedürftig, aber wenn man sich ein bischen mit ihnen beschäftigt, sind sie sehr praktisch, da man ohne Formeln viel sagen kann.

2.4 Beispiel

Betrachte wie im ersten Abschnitt

$$V = \mathbb{C}[t]_{\leq 3} = \left\{a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 1 \middle| a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}\right\}.$$

als $\mathbb{C}$-Vektorraum. Als lineare Abbildung wollen wir die Ableitung von Polynomen betrachten:

$$\begin{aligned} D : \mathbb{C}[t]_{\leq 3} &\longrightarrow \mathbb{C}[t]_{\leq 3}\\ a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 1 &\longmapsto 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 1\end{aligned}$$

Für eine darstellende Matrix brauchen wir jetzt zwei Basen. Wir wählen beide gleich der kanonischen Basis:

$$\mathfrak{B}_V = \mathfrak{B}_W := \mathfrak{B} = \left\{1, t, t^2, t^3\right\}.$$

Berechne die Bilder der Basisvektoren:

$$\begin{array}{lclcl} D(1) & = & 0 & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3, \\ D(t) & = & 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3, \\ D\left(t^2\right) & = & 2t & = & 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3, \\ D\left(t^3\right) & = & 3t^2 & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 3 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3. \end{array}$$

Damit hat die darstellende Matrix bzgl. $\mathfrak{B}$ die Gestalt

$$\operatorname{mat}_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hier sehen wir noch einmal am Beispiel, dass die darstellende Matrix $\operatorname{mat}_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}}(D)$ nur auf Koordinatenvektoren angewandt werden kann, nicht aber auf die Polynome: Matrix mal Polynom ergibt einfach nichts sinnvolles.
Andersherum kann die lineare Abbildung D nur auf Polynome angewandt werden, nicht aber auf Koordinatenvektoren: Die Polynomableitung macht für Spaltenvektoren nun einmal keinen Sinn.
In beiden Fällen sind die Räume einfach falsch, was man auch im folgenden Diagramm wiederfinden kann:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[t]_{\leq 3} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\Phi_{\mathfrak{B}}"'] & \mathbb{C}[t]_{\leq 3} \\ \mathbb{C}^4 \arrow[r, "\operatorname{mat}_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}}(D)"'] & \mathbb{C}^4 \arrow[u, "\Phi_{\mathfrak{B}}^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm kommutiert, wie wir in Abschnitt 2.3 gesehen haben.

Wir wollen noch die darstellende Matrix bezüglich anderer Basen berechnen, und zwar bezüglich der bereits aus dem ersten Abschnitt bekannten Basis

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_V = \widetilde{\mathfrak{B}}_W := \widetilde{\mathfrak{B}} = \left\{1, 1+t, t^2, t^3\right\}.$$

Wir berechnen wieder die Bilder der Basisvektoren und stellen diese in der Basis $\widetilde{\mathfrak{B}}_W$ dar:

$$\begin{array}{rclcl} D(1) & = & 0 & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1+t) + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3, \\ D(1+t) & = & 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+t) + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3, \\ D\left(t^2\right) & = & 2t & = & -2 \cdot 1 + 2 \cdot (1+t) + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3, \\ D\left(t^3\right) & = & 3t^2 & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1+t) + 3 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3. \end{array}$$

Also hat die darstellende Matrix von D bezüglich $\widetilde{\mathfrak{B}}$ die Gestalt

$$\operatorname{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wir halten noch fest, dass $\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}(D)$ einfacher aussieht als $\operatorname{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(D)$. Hier lässt sich erahnen, dass es Basen gibt, in denen die darstellende Matrix einer linearen Abbildung schöner aussieht (d.h. eine einfachere Gestalt besitzt) als in anderen Basen. Dies ist insbesondere bei Endomorphismen von Interesse, und führt auf das Diagonalisieren von quadratischen Matrizen und letztendlich auf die Jordannormalform. □

2.5 Matrixdarstellung von Verknüpfungen von linearen Abbildungen

Sei K ein Körper, V, W, X endlichdimensionale K-Vektorräume. Seien $\mathfrak{B}_V, \mathfrak{B}_W$ und $\mathfrak{B}_X$ K-Basen von respektive V, W und X. Seien weiter $f \in L(V, W)$ und $g \in L(W, X)$. Dann ist $g \circ f : V \to X$ wieder linear, also $g \circ f \in L(V, X)$, und wir können die Matrixdarstellung dieser Abbildung betrachten. Für diese gilt:

$$\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V\to\mathfrak{B}_X}(g \circ f) = \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_W\to\mathfrak{B}_X}(g) \cdot \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V\to\mathfrak{B}_W}(f).$$

In Worten bedeutet das: die Matrixdarstellung der Verknüpfung von Abbildungen ist das Produkt der Matrxidarstellungen der einzelnen Abbildungen, oder noch anders: beim Übergang zu Matrizen geht Hintereinanderausführung in Multiplikation über.
Oder in Diagramm-Sprache formuliert: Ist das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & W \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

gegeben (dieses Diagramm ist kommutativ nach Definition der Verknüpfung von zwei Abbildungen!), dann ist auch

$$\begin{tikzcd} K^{\dim_K(V)} \arrow[r, "\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V\to\mathfrak{B}_W}(f)"] \arrow[dr, "\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V\to\mathfrak{B}_X}(g\circ f)"'] & K^{\dim_K(W)} \arrow[d, "\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_W\to\mathfrak{B}_X}(g)"] \\ & K^{\dim_K(X)} \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm.

Der Beweis wurde in der Vorlesung erbracht, die Formel lässt sich aber auch leicht nachrechnen. Die größte Schwierigkeit ist, sich nicht in Indizes zu verlieren. Daher ist es sehr empfehlenswert, die Formel einmal selbst nachzurechnen (Training !).

Als wichtige Konsequenz wollen wir untersuchen, wie die darstellende Matrix der Inversen f^{-1} eines Isomorphismus mit der Matrixdarstellung f zusammenhängt.

Sei K ein Körper, V, W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim_K(V) = n = \dim_K(W)$. Seien $\mathfrak{B}_V$ eine K-Basis von V und $\mathfrak{B}_W$ eine K-Basis von W.

Sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus. Dann existiert die Umkehrabbildung f^{-1} und ist wieder linear. Es gelten:

$$\mathrm{id}_V = f^{-1} \circ f \quad \text{ und } \quad \mathrm{id}_W = f \circ f^{-1}.$$

Wenden wir $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_V}$ auf die erste und $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_W \to \mathfrak{B}_W}$ auf die zweite Gleichung an, so folgt:

$$I_n = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_V}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_V}\left(f^{-1} \circ f\right) = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_W \to \mathfrak{B}_V}\left(f^{-1}\right) \cdot \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)$$

und

$$I_n = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_W \to \mathfrak{B}_W}(\mathrm{id}_W) = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_W \to \mathfrak{B}_W}\left(f \circ f^{-1}\right) = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f) \cdot \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_W \to \mathfrak{B}_V}\left(f^{-1}\right)$$

Damit ist $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_W \to \mathfrak{B}_V}\left(f^{-1}\right)$ eine Links- und Rechtsinverse für $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)$, und daher die eindeutig bestimmte inverse Matrix von $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)$. In Formeln:

$$\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_W \to \mathfrak{B}_V}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)\right)^{-1}.$$

Also ist die darstellende Matrix der inversen Abbildung f^{-1} die Inverse der darstellenden Matrix von f.

Wir halten noch den folgenden Spezialfall fest, da wir ihn im nächsten Abschnitt 3 benötigen.

Seien $V = W, f = \mathrm{id}_V$ und $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_V, \widetilde{\mathfrak{B}} := \mathfrak{B}_W$ zwei K-Basen von V. Dann folgt:

$$\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}} \to \mathfrak{B}}(\mathrm{id}_V) = \left(\mathrm{mat}_{\mathfrak{B} \to \widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V)\right)^{-1}.$$

3 Basiswechsel

Ziel: Koordinaten bezüglich verschiedener Basen ineinander umrechnen, sowie darstellende Matrizen bezüglich verschiedener Basen ineinander umrechnen.

3.1 Basiswechselmatrizen

Bisher haben wir immer nur eine Basis pro Vektorraum betrachtet. Wir wissen aber, dass es i.A. verschiedene Basen gibt. Wir wollen nun untersuchen, wie sich Koordinatenvektoren bezüglich verschiedener Basen ineinander umrechnen lassen.

Sei also K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = n$. Seien $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\widetilde{\mathfrak{B}} = \{\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_n\}$ zwei K-Basen von V, und $\Phi_{\mathfrak{B}}$ und $\Phi_{\widetilde{\mathfrak{B}}}$ die zugehörigen Koordinatenabbildungen.

Wie hängen diese zusammen ? Die Situation lässt sich wie folgt darstellen:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "?_1"] \arrow[d, "\Phi_{\mathfrak{B}}"'] & V \arrow[d, "\Phi_{\widetilde{\mathfrak{B}}}"] \\ K^n \arrow[r, "?_2"'] & K^n \end{tikzcd}$$

Gesucht ist nun, was anstelle der „?“ stehen soll. Beachte, dass der Zusammenhang bijektiv sein muss, da wir von den einen Koordinaten auf die zugehörigen Vektoren und dann auf die anderen Koordinaten umrechnen können (in beide Richtungen).

Da wir verschiedene Koordinatendarstellungen eines Vektors $v \in V$ untersuchen wollen, darf die Abbildung von V nach V die Vektoren nicht verändern, womit nur die Identität auf V in Frage kommt! Wir ersetzen also $?_1 = \mathrm{id}_V$. Wir bemerken auch, dass id_V bijektiv ist, was unserer ersten Überlegung Rechnung trägt.

Da wir nun herausgefunden haben, das id_V die gesuchte Abbildugn von V nach V ist, wissen wir aus dem vorherigen Abschnitt sofort, welche Abbildung wir zwischen K^n und K^n wählen müssen: die Matrixdarstellung von id_V bezüglich der Basen $\mathfrak{B}$ und $\widetilde{\mathfrak{B}}$.

Daher erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\Phi_{\mathfrak{B}}"'] & V \arrow[d, "\Phi_{\widetilde{\mathfrak{B}}}"] \\ K^n \arrow[r, "\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V)"'] & K^n \end{tikzcd}$$

Wir halten fest: Hier schreibt sich die vorletzte Formel aus Abschnitt 2.3:

$$\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V) \circ \Phi_{\mathfrak{B}} = \Phi_{\widetilde{\mathfrak{B}}} \circ \mathrm{id}_V = \Phi_{\widetilde{\mathfrak{B}}},$$

Daher: Um Koordinaten bzgl. $\mathfrak{B}$ in Koordinaten bzgl. $\widetilde{\mathfrak{B}}$ umzurechnen, wird der Koordinatenvektor bzgl. $\mathfrak{B}$ mit $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V)$ multipliziert, das Ergebnis ist der Koordinatenvektor bzgl. $\widetilde{\mathfrak{B}}$. In Formeln schreibt sich das für $v \in V$:

$$\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V) \cdot \Phi_{\mathfrak{B}}(v) = \Phi_{\widetilde{\mathfrak{B}}}(v),$$

Die Matrix $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V)$ wird dann *Basisübergangsmatrix* oder (Basiswechselmatrix) von der Basis $\mathfrak{B}$ in die Basis $\widetilde{\mathfrak{B}}$ genannt.

Im Abschnitt 2.5 haben wir gezeigt, dass

$$\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}\to\mathfrak{B}}(\mathrm{id}_V) = \left(\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V)\right)^{-1}$$

gilt. Also wird der umgekehrte Basiswechsel durch die Inverse der ursprünglichen Basiswechselmatrix beschrieben.

Wir wollen noch einmal aufschreiben, wie sich die Koeffizienten der Matrix $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V)$ berechnen. Setze $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V) =: \left[p_{ij}\right] = P$, so sind die p_{ij} durch

$$
\begin{aligned}
v_1 &= p_{11}\widetilde{v}_1 + p_{21}\widetilde{v}_2 + \ldots + p_{n1}\widetilde{v}_n \\
v_2 &= p_{12}\widetilde{v}_1 + p_{22}\widetilde{v}_2 + \ldots + p_{n2}\widetilde{v}_n \\
&\vdots \\
v_n &= p_{1n}\widetilde{v}_1 + p_{2n}\widetilde{v}_2 + \ldots + p_{nn}\widetilde{v}_n
\end{aligned}
$$

eindeutig bestimmt.
Dies lässt sich auch als

$$
\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{v}_1 & \widetilde{v}_2 & \ldots & \widetilde{v}_n \end{bmatrix} P
$$

schreiben, wobei diese Matrixmultiplikation rein formal zu verstehen ist. (Schließlich müssen weder v_j noch $\widetilde{v}_j$ Spaltenvektoren sein).

Damit haben wir genau die Definition der Basisübergangsmatrix aus der Vorlesung (und dem Skript) wiedergefunden.

Achtung: Die Basisübergangsmatrix $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V)$ wird von links an die Koordinatenvektoren multipliziert, aber von rechts an die Basisvektoren von V.

3.2 Beispiel

Betrachte wieder den Vektorraum $V = \mathbb{C}[t]_{\leq 3}$, mit den beiden Basen $\mathfrak{B} = \left\{1, t, t^2, t^3\right\}$ und $\widetilde{\mathfrak{B}} = \left\{1, 1+t, t^2, t^3\right\}$.

Die Basiswechselmatrix $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V)$ von $\mathfrak{B}$ nach $\widetilde{\mathfrak{B}}$ berechnet sich dann als:

$$
\begin{array}{lllll}
\mathrm{id}_V(1) & = & 1 & = & 1\cdot 1 + 0\cdot(1+t) + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3, \\
\mathrm{id}_V(t) & = & t & = & -1\cdot 1 + 1\cdot(1+t) + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3, \\
\mathrm{id}_V\left(t^2\right) & = & t^2 & = & 0\cdot 1 + 0\cdot(1+t) + 1\cdot t^2 + 0\cdot t^3, \\
\mathrm{id}_V\left(t^3\right) & = & t^3 & = & 0\cdot 1 + 0\cdot(1+t) + 0\cdot t^2 + 1\cdot t^3,
\end{array}
$$

also

$$
\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Mit den bereits in Abschnitt 1.2 berechneten Koordinatendarstellungen folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}\left(\mathrm{id}_V\right)\Phi_{\mathfrak{B}}\left(a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_01\right) &= \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}}\\ &= \begin{bmatrix}a_0-a_1\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}}\\ &= \Phi_{\widetilde{\mathfrak{B}}}\left(a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_01\right),\end{aligned}$$

wie es nach unseren theoretischen Überlegungen auch sein muss. □

3.3 Basiswechsel und darstellende Matrizen

Wir wollen nun betrachten, wie sich darstellende Matrizen einer linearen Abbildung bzgl. verschiedener Basen ineinander umrechnen lassen.

Sei K ein Körper, und V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim_K(V)=n$ und $\dim_K(W)=m$. Seien $\mathfrak{B}_V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ und $\widetilde{\mathfrak{B}}=\{\widetilde{v}_1,\ldots,\widetilde{v}_n\}$ zwei Basen von V und $\mathfrak{B}_W=\{w_1,\ldots,w_m\}$ und $\widetilde{\mathfrak{B}}_W=\{\widetilde{w}_1,\ldots,\widetilde{w}_m\}$ zwei Basen von W.

Sei weiter $f:V\to W$ ein Vektorraumhomomorphismus.

Wir haben bereits gesehen, wie $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V\to\mathfrak{B}_W}(f)$ und $\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V\to\widetilde{\mathfrak{B}}_W}(f)$ aus f berechnet werden können.

Aber wie hängen beide darstellende Matrizen zusammen ?

Es ist

$$f=\mathrm{id}_W\circ f\circ\mathrm{id}_V,$$

da beide Identitäten nichts bewirken. Übergang zur Matrixdarstellung mit $\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V\to\widetilde{\mathfrak{B}}_W}$ liefert:

$$\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V\to\widetilde{\mathfrak{B}}_W}(f)=\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V\to\widetilde{\mathfrak{B}}_W}\left(\mathrm{id}_W\circ f\circ\mathrm{id}_V\right).$$

Nun nutzen wir das Ergebnis aus Abschnitt 2.5 und schieben in V die Basis $\mathfrak{B}_V$ und in W die Basis $\mathfrak{B}_W$ dazwischen:

$$\begin{aligned}\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V\to\widetilde{\mathfrak{B}}_W}(f) &= \mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V\to\widetilde{\mathfrak{B}}_W}\left(\mathrm{id}_W\circ f\circ\mathrm{id}_V\right)\\ &= \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V\to\widetilde{\mathfrak{B}}_W}\left(\mathrm{id}_W\circ f\right)\cdot\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V\to\mathfrak{B}_V}\left(\mathrm{id}_V\right)\\ &= \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_W\to\widetilde{\mathfrak{B}}_W}\left(\mathrm{id}_W\right)\cdot\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V\to\mathfrak{B}_W}(f)\cdot\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V\to\mathfrak{B}_V}\left(\mathrm{id}_V\right).\end{aligned}$$

Damit haben wir den gesuchten Zusammenhang zwischen zwei darstellenden Matrizen einer linearen Abbildung bzgl. verschiedener Basen gefunden. Dieser lässt sich wieder in einem kommutativen Diagramm darstellen:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)"] \arrow[d, "\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \widetilde{\mathfrak{B}}_V}(\mathrm{id}_V)"'] & K^m \\
K^n \arrow[r, "\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V \to \widetilde{\mathfrak{B}}_W}(f)"'] & K^m \arrow[u, "\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_W \to \mathfrak{B}_W}(\mathrm{id}_W)"']
\end{tikzcd}$$

Als Letztes wollen wir die Ergebnisse aus diesem Abschnitt (Zusammenhang zwischen darstellenden Matrizen bzgl. verschiedener Basen) und die aus Abschnitt 2.3 (Zusammenhang zwischen Abbildung und ihrer Matrixdarstellung bzgl. gegebener Basen) zu einem großen kommutativen Diagramm zusammenfassen. Dabei behalten wir die Bezeichnungen von eben bei.

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \mathfrak{B}_W}(f)"] \arrow[dd, "\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_V \to \widetilde{\mathfrak{B}}_V}(\mathrm{id}_V)"'] & & & K^m \\
& V \arrow[ul, "\Phi_{\mathfrak{B}_V}"'] \arrow[dl, "\Phi_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V}"] \arrow[r, "f"] & W \arrow[ur, "\Phi_{\mathfrak{B}_W}"] \arrow[dr, "\Phi_{\widetilde{\mathfrak{B}}_W}"'] & \\
K^n \arrow[rrr, "\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V \to \widetilde{\mathfrak{B}}_W}(f)"'] & & & K^m \arrow[uu, "\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_W \to \mathfrak{B}_W}(\mathrm{id}_W)"']
\end{tikzcd}$$

3.4 Beispiel

Betrachte wieder den $\mathbb{C}$-Vektorraum $V = \mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ mit den beiden $\mathbb{C}$-Basen $\mathfrak{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ und $\widetilde{\mathfrak{B}} = \{1, 1+t, t^2, t^3\}$, und als lineare Abbildung die Ableitung D.

Aus den vorigen Beispielen ist bereits bekannt:

$$\mathrm{mat}_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}} \to \widetilde{\mathfrak{B}}}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{mat}_{\mathfrak{B} \to \widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen noch die inverse Matrix der Basisübergangsmatrix:

$$\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}\to\mathfrak{B}}(\mathrm{id}_V) = \left(\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V)\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
&\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V)\cdot\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}(D)\cdot\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}\to\mathfrak{B}}(\mathrm{id}_V)\\
&= \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\
&= \mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(D).
\end{aligned}$$

Somit hätten wir uns früher eine der beiden darstellenden Matrizen von D sparen können.

Wir können nun noch darstellende Matrizen von D bezüglich anderen Kombination von Basen berechnen, z.B. $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(D)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(D) &= \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\widetilde{\mathfrak{B}}}(\mathrm{id}_V)\,\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}(D)\\
&= \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\square$

4 Matrixdarstellung von Bilinearformen (Sesquilinearformen)

Ziel: Beschreibe Bilinearformen (oder Sesquilinearformen) auf endlich-dimensionalen Vektorräumen durch Matrizen, wieder um gut rechnen zu können.

4.1 Berechnung einer darstellenden Matrix

Seien K ein Körper, V, W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim_K(V) = n$, $\dim_K(W) = m$, $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine K-Basis von V und $\mathfrak{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine K-Basis von W.

Sei $\beta : V \times W \to K$ eine Bilinearform (bzw. Sesquilinearform).

Dann ist

$$\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V\times\mathfrak{B}_W}(\beta) := \left[b_{i,j}\right] = \left[\beta(v_j, w_i)\right]_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \in K^{m,n}$$

die *Matrixdarstellung von β bzgl. der Basen $\mathfrak{B}_V$ und $\mathfrak{B}_W$*.[1]

Wie bei linearen Abbildungen kann man für festes $\mathfrak{B}_V$ und $\mathfrak{B}_W$ zeigen, dass

$$\begin{aligned}\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V\times\mathfrak{B}_W} : \{\beta : V\times W\to K \mid \beta \text{ bilinear (sesquilinear)}\} &\longrightarrow K^{m,n}\\ \beta &\longmapsto \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V\times\mathfrak{B}_W}(\beta)\end{aligned}$$

ein Vektorraumisomorphismus ist (Übungsaufgabe !).

Bemerkung: Oft wird der Spezialfall $V = W$ und $\mathfrak{B}_V = \mathfrak{B}_W$ betrachtet. Dann erhalten wir quadratische Matrizen.

Wir zeigen zuerst, dass die Matrixdarstellung mit der Bilinearform (Sesquilinearform) übereinstimmt. Genauer zeigen wir, dass $\forall\, v\in V, w\in W$ mit

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j, \quad w = \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j, \quad \text{also} \quad \Phi_{\mathfrak{B}_V}(v) = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix} =: \lambda, \quad \Phi_{\mathfrak{B}_W}(w) = \begin{bmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_m\end{bmatrix} =: \mu,$$

gilt:

$$\mu^T \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V\times\mathfrak{B}_W}(\beta)\,\lambda = \beta(v,w)$$

falls β eine Bilinearform ist, und

$$\mu^H \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V\times\mathfrak{B}_W}(\beta)\,\lambda = \beta(v,w)$$

falls β eine Sesquilinearform ist. (Dabei haben wir K und $K^{1,1}$ identifiziert.)

Der Beweis erfolgt durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned}\mu^T \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V\times\mathfrak{B}_W}(\beta)\,\lambda &= \begin{bmatrix}\mu_1 & \dots & \mu_m\end{bmatrix} \left[\beta(v_j, w_i)\right]_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\mu_1 & \dots & \mu_m\end{bmatrix} \left[\sum_{j=1}^{n} \beta(v_j, w_i)\,\lambda_j\right]_{1\le i\le m} = \left[\sum_{i=1}^{m} \mu_i \sum_{j=1}^{n} \beta(v_j, w_i)\,\lambda_j\right]\\ &= \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta(\lambda_j v_j, \mu_i w_i)\right] = \left[\beta\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j v_j, \sum_{i=1}^{m}\mu_i w_i\right)\right]\\ &= \left[\beta(v,w)\right] = \beta(v,w)\end{aligned}$$

[1] In einigen Büchern wird die Matrixdarstellung genau durch die Transponierte unserer Matrix definiert. Das ändert nichts an der Theorie, und wir erhalten Sätze für diese andere Definition aus den hier gezeigten durch transponieren der Gleichungen.

Im Falle einer Sesquilinearform geht die Rechnung analog, das komplex konjugieren der μ_i am Anfang verschwindet beim hineinziehen der μ_i ins zweite Argument von β.

Damit ist gezeigt, dass die Matrixdarstelleung einer Bilinearform (Sesquilinearform) mit der Bilinearform (Sesquilinearform) übereinstimmt, also ist die Definition sinnvoll.

4.2 Basiswechsel und darstellende Matrizen bei Bilinearformen (Sesquilinearform)

Ziel: Darstellende Matrizen von Bilinearformen (Sesquilinearformen) bezüglich verschiedener Basen ineinander Umrechnen.

Sei K ein Körper. Seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim_K(V) = n$ und $\dim_K(W) = m$. Seien $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\widetilde{\mathfrak{B}}_V = \{\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_n\}$ zwei K-Basen von V und $\mathfrak{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ und $\widetilde{\mathfrak{B}}_W = \{\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_m\}$ zwei K-Basen von W.
Seien $P = [p_{ij}] := \operatorname{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V \to \mathfrak{B}_V}(\mathrm{id}_V)$ und $Q = [q_{ij}] := \operatorname{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_W \to \mathfrak{B}_W}(\mathrm{id}_W)$, dann gilt

$$\operatorname{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V \times \widetilde{\mathfrak{B}}_W}(\beta) = Q^T \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V \times \mathfrak{B}_W}(\beta)\, P$$

falls β eine Bilinearform ist, und entsprechend

$$\operatorname{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V \times \widetilde{\mathfrak{B}}_W}(\beta) = Q^H \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V \times \mathfrak{B}_W}(\beta)\, P$$

falls β eine Sesquilinearform ist.

Der Beweis erfolgt wieder durch Nachrechnen. Ist β eine Bilinearform so ist:

$$\begin{aligned}
Q^T \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V \times \mathfrak{B}_W}(\beta)\, P &= Q^T \left[\beta(v_j, w_i)\right]_{1\le i\le m, 1\le j\le n} P \\
&= Q^T \left[\sum_{k=1}^{n} \beta(v_k, w_i)\, p_{kj}\right]_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \\
&= \left[\sum_{l=1}^{m} q_{li} \sum_{k=1}^{n} \beta(v_k, w_l)\, p_{kj}\right]_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \\
&= \left[\sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \beta(p_{kj} v_k, q_{li} w_l)\right]_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \\
&= \left[\beta\left(\sum_{k=1}^{n} p_{kj} v_k, \sum_{l=1}^{m} q_{li} w_l\right)\right]_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \\
&= \left[\beta(\widetilde{v}_j, \widetilde{w}_i)\right]_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \\
&= \operatorname{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V \times \widetilde{\mathfrak{B}}_W}(\beta).
\end{aligned}$$

Die Aussage für Sesquilinearformen folgt wieder analog, das komplex konjugieren der q_{ij} kompensiert sich, da die q_{ij} in das zweite Argument von β gezogen werden.

Bemerkung: Im Spezialfall $V = W, \mathfrak{B}_V = \mathfrak{B}_W$ erhalten wir gerade eine Kongruenztransformation der darstellenden Matrix bei Basistransformation:

$$\operatorname{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_V \times \widetilde{\mathfrak{B}}_V}(\beta) = P^T \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}_V \times \mathfrak{B}_V}(\beta)\, P.$$

4.3 Beispiel

Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = P_{\leq 3}(\mathbb{R})$ der polynomialen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit Grad kleiner gleich 3, also

$$P_{\leq 3}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists\, p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \text{ mit } f(x) := p(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

Definiere für $1 \leq j \leq 4$

$$p_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{j-1}.$$

Dann sind $\mathfrak{B} := \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ und $\widetilde{\mathfrak{B}} := \{p_1, p_1 + p_2, p_3, p_4\}$ zwei $\mathbb{R}$-Basen von $P_{\leq 3}(\mathbb{R})$.

Definiere

$$\begin{aligned} \beta : P_{\leq 3}(\mathbb{R}) \times P_{\leq 3}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longmapsto \beta(p, q) = \int_0^1 p(x)\, q(x)\; dx, \end{aligned}$$

β ist eine Bilinearform auf $P_{\leq 3}(\mathbb{R})$.

Wir berechnen die Matrixdarstellung $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}}(\beta)$ von β bezüglich der Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$. Wir berechnen nur einige Einträge, die anderen bleiben zur Übung:

$$\begin{aligned} b_{1,j} &= \beta(p_j, p_1) = \int_0^1 x^{j-1} \cdot 1\, dx = \frac{1}{j} x^j \Big|_0^1 = \frac{1}{j}, \\ b_{3,4} &= \beta(p_4, p_3) = \int_0^1 x^3 \cdot x^2\, dx = \frac{1}{6}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Als Matrixdarstellung ergibt sich

$$\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}}(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Das die Matrixdarstellung von Vorteil sein kann, lässt sich hier nun gut erkennen. Wenn wir einmal die darstellende Matrix haben, so können wir $\beta(p, q)$ statt dem Integral nun als Produkt „Vektor mal Matrix mal Vektor“ mit den Koordinatenvektoren berechnen. Bezüglich einer geeigneten Basis, wie der kanonischen Basis $\mathfrak{B}$, lassen sich die Koordinaten der Polynome sofort hinschreiben, und wir können $\beta(p, q)$ rasch berechnen.
Andernfalls müssen erst die Polynome p und q ausmultipliziert werden, was bei Polynomen vom Grad 3 bereits keinen Spaß mehr macht, und dann das Ergebnis integriert werden.

Nun berechnen wir $\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}\times\widetilde{\mathfrak{B}}}(\beta)$ über einen Basiswechsel. Die Basistransformationsmatrix ist

$$P = \mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}\to\mathfrak{B}}(\mathrm{id}_V) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{mat}_{\widetilde{\mathfrak{B}}\times\widetilde{\mathfrak{B}}}(\beta) &= P^T \, \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}}(\beta)\, P \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{6} & \frac{7}{12} & \frac{9}{20} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & \frac{7}{12} & \frac{9}{20} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{20} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Auch hier sehen wir: Die Transformation mit der Basisübergangsmatrix geht relativ schnell (wenn die Basisübergangsmatrix gegeben ist oder sich leicht berechnen lässt).
Die alternative wäre hier einige Integrale zu berechnen, wobei hier, wegen der Symmetrie dieses β, nur 10 Integrale berechnet werden müssen. $\square$