Technische Universität Berlin SoSe 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS13/LinAlg1/`
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. A. Międlar Stand: 19. April 2013

Lineare Algebra I – Hausaufgabe 2

Abgabe: 29.04.2013 **vor** der Übung

---

1. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $(G, \oplus)$ eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Elemente aus G:

1.) $(a^{-1})^{-1} = a$,

2.) $(a \oplus b)^{-1} = b^{-1} \oplus a^{-1}$,

3.) $a \oplus b_1 = a \oplus b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$,

4.) $a_1 \oplus b = a_2 \oplus b \Rightarrow a_1 = a_2$.

2. Aufgabe (6 Punkte)
Sei $(G, \oplus)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$, $U \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1.) $(U, \oplus)$ ist eine Untergruppe von $(G, \oplus)$.

2.) Für $a, b \in U$ folgt $a \oplus b \in U$ und für $a \in U$ folgt $a^{-1} \in U$.

3.) Für $a, b \in U$ folgt $a \oplus b^{-1} \in U$.

3. Aufgabe (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass in einem Körper $1 + 1 = 0$ genau dann gilt, wenn $1 + 1 + 1 + 1 = 0$ gilt.

4. Aufgabe (6 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Dann ist $n\mathbb{Z} = \{nk | k \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$, und durch $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z} = \{nk | k \in \mathbb{Z}\}$ wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert. Die Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ besitzen die Gestalt $[a] = \{a + nk | k \in \mathbb{Z}\}$. Von diesen gibt es genau n verschiedene. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bezeichnet, also $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$. Durch

$$\oplus : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad ([a], [b]) \mapsto [a] \oplus [b] = [a + b],$$
$$\odot : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad ([a], [b]) \mapsto [a] \odot [b] = [a \cdot b],$$

werden auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine Addition und eine Multiplikation erklärt (dabei sind $+$ und $\cdot$ die Addition und Multiplikation aus $\mathbb{Z}$). $\oplus$ wohldefiniert ist.

1.) Zeigen Sie, dass auch $\odot$ wohldefiniert ist.
Hinweis: Zu zeigen ist, dass aus $[a] = [a']$ und $[b] = [b']$ folgt $[ab] = [a'b']$.

2.) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

5. Aufgabe (2 Punkte)

Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe von G. Wir definieren die Relation $\sim_U$ auf G durch

$$a \sim_U b :\Leftrightarrow a * b^{-1} \in U.$$

Zeigen Sie, dass $\sim_U$ eine Äquivalenzrelation auf G definiert.

Gesamtpunktzahl: 20