Technische Universität Berlin SoSe 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS13/LinAlg1/`
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. A. Mięͅdlar Stand: 29. April 2013

Lineare Algebra I – Hausaufgabe 3

Abgabe: 06.05.2013 **vor** der Übung

Bitte beachten Sie, dass ALLE Aussagen begründet werden müssen.

1. Aufgabe (3 Punkte)

1.) Seien $A, B \in R^{n,m}$. Zeigen Sie, dass $(A-B)^T = A^T - B^T$.

2.) Seien $A \in R^{n,m}$, $B \in R^{m,k}$ und $C \in R^{k,l}$. Zeigen Sie, dass $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

3.) Seien $A, B \in R^{n,n}$, so dass $AB = BA$ (wir sagen dass A und B *kommutieren*). Zeigen Sie, dass $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{3,3}$ und $B = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$. Berechnen Sie A^n und B^n für jedes $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins (mit $1 \neq 0$). Weiter sei $A \in R^{n,n}$ eine Matrix, für die ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = I_n$ existiert. Dabei sei m die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft $A^m = I_n$.

1.) Untersuchen Sie, ob A invertierbar ist. Geben Sie gegebenenfalls eine besonders einfache Darstellung der Inversen an.

2.) Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Menge $\{A^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, welche Elemente in dieser Menge enthalten sind und vergessen Sie nicht nachzuweisen, dass diese alle verschieden sind.

4. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Eine Teilmenge $S \subseteq R$ heißt *Unterring* von R, falls $(S, +, \cdot)$ ein Ring ist. Wie bei Körpern zeigt man, dass $S \subseteq R$ genau dann ein Unterring von R ist, falls S die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

1.) $0_R \in S$,

2.) für $r, s \in S$ sind $r + s \in S$ und $r \cdot s \in S$,

3.) für $r \in S$ ist $-r \in S$.

(Diese Charakterisierung dürfen Sie ohne Beweis verwenden.)

Sei nun $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Es sei $(R^{n,n}, +, \cdot)$ der Ring der $n \times n$-Matrizen und sei die Menge $A^{n,n}$ durch

$$A^{n,n} := \{ [a_{i,j}] \mid a_{n,j} = 0 \text{ für } j = 1, 2, \dots, n \} \subseteq R^{n,n}$$

gegeben.

1.) Zeigen Sie, dass $A^{n,n}$ ein Unterring von $R^{n,n}$ ist.

2.) Zeigen Sie, dass $A \cdot M \in A^{n,n}$ für alle $M \in R^{n,n}$ und $A \in A^{n,n}$ gilt.
(Ein Unterring mit dieser Eigenschaft heißt *Rechtsideal* von $R^{n,n}$.)

3.) Finden Sie einen zu $A^{n,n}$ analogen Unterring $B^{n,n}$ von $R^{n,n}$, so dass $M \cdot B \in B^{n,n}$ für alle $M \in R^{n,n}$ und $B \in B^{n,n}$ gilt. Beweisen Sie ihre Aussage.
(Solch ein Unterring heißt *Linksideal* von $R^{n,n}$.)

Gesamtpunktzahl: 20