Technische Universität Berlin SoSe 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS13/LinAlg1/`
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. A. Międlar Stand: 3. Mai 2013

Lineare Algebra I – Hausaufgabe 4

Abgabe: 13.05.2013 **vor** der Übung

Bitte beachten Sie, dass ALLE Aussagen begründet werden müssen.

1. Aufgabe (3 Punkte)
Sei $A \in R^{n,n}$ eine invertierbare Matrix und sei B eine Matrix die durch Multiplikation der erste Zeile von A mit einem Skalar $c = 2$ ersteht. Wie kann man die Inverse von B aus dem Inverse von A erhalten?

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Bestimmen Sie alle invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen $A \in R^{n,n}$ mit $A^{-1} = A^T$.

3. Aufgabe (6 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und seien $A_{11} \in R^{n_1,n_1}$, $A_{12} \in R^{n_1,n_2}$, $A_{21} \in R^{n_2,n_1}$ und $A_{22} \in R^{n_2,n_2}$. Weiter sei

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in R^{n_1+n_2,n_1+n_2}.$$

1.) Sei $A_{11} \in \mathrm{GL}_{n_1}(R)$. Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ invertierbar ist. Finden Sie eine Formel für A^{-1}, falls A invertierbar ist.

2.) Sei $A_{22} \in \mathrm{GL}_{n_2}(R)$. Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ invertierbar ist. Finden Sie eine Formel für A^{-1}, falls A invertierbar ist.

Hinweis: Tutoriumsaufgabe 4-2.

4. Aufgabe (7 Punkte)
Zeigen Sie, dass eine *obere Dreiecksmatrix* $A \in R^{n,n}$, $A = [a_{ij}], i, j = 1, \ldots, n$,

$$a_{ij} = 0, \quad \text{für} \quad i > j,$$

ist invertierbar genau dann, wenn alle Hauptdiagonalelemente verschieden von 0 sind, d.h.

$$a_{ii} \neq 0, \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Gesamtpunktzahl: 20