Technische Universität Berlin SoSe 2013
Institut für Mathematik http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS13/LinAlg1/
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. A. Międlar Stand: 10. Mai 2013

Lineare Algebra I – Hausaufgabe 5

Abgabe: 21.05.2013 **vor** der Vorlesung

Bitte beachten Sie, dass ALLE Aussagen begründet werden müssen.

1. Aufgabe (4 Punkte)

Seien R ein kommutativer Ring mit Eins, $A \in \mathrm{GL}_n(R)$, $U \in R^{n,m}$ und $V \in R^{m,n}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

1.) $A + UV \in \mathrm{GL}_n(R)$ genau dann, wenn $I_m + VA^{-1}U \in \mathrm{GL}_m(R)$.

2.) Falls $I_m + VA^{-1}U \in \mathrm{GL}_m(R)$, so ist

$$(A + UV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I_m + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}.$$

Hinweis: HA 4-3.

2. Aufgabe (7 Punkte)

1.) Berechnen Sie die Treppennormalform von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -6i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4,4}.$$

Geben Sie dabei die verwendeten Elementarmatrizen an. Ist A invertierbar? Falls ja, dann berechnen Sie die Inverse als Produkt der Elementarmatrizen.

2.) Berechnen Sie die Treppennormalform der Matrizen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{3,4}, \quad C = \begin{bmatrix} i & 0 & 1 \\ 1 & -i & -i \\ i & i & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3},$$

unter Angabe der verwendeten Elementarmatrizen. Bestimmen Sie die Pivotpositionen und den Rang von B und C. Untersuchen Sie weiter, welche Matrizen invertierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse.

Hinweis: Für Inverse können (und sollten!) Sie eine Probe machen: Berechnen Sie $A^{-1}A$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei K ein Körper und $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K^{2,2}$ mit $ad - bc \neq 0$. Berechnen Sie die Treppennormalform von A und bestimmen Sie mit Hilfe dieser Rechnung eine Formel für A^{-1}.
Hinweis: Eine geeignete Fallunterscheidung kann Ihnen helfen.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & A_{12} \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right] \in K^{n,n}$, wobei $B \in K^{n-1,n-1}$ sei. Zeigen Sie, dass gilt: $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ genau dann, wenn $B \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$.

Gesamtpunktzahl: 20