Technische Universität Berlin SoSe 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS13/LinAlg1/`
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. A. Międlar Stand: 16. Mai 2013

Lineare Algebra I – Hausaufgabe 6

Abgabe: 27.05.2013 **vor** der Übung

Bitte beachten Sie, dass ALLE Aussagen begründet werden müssen.

1. Aufgabe (8 Punkte)

1.) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{cases}$$

über den reellen Zahlen in Matrixform (d.h. als $Ax = b$).

2.) Geben Sie die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ an, wobei

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,3}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,1}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,3}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,1}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Es seien $\alpha \in \mathbb{Q}$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}, \quad b_\alpha = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,1}.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme $Ax = 0$ und $Ax = b_\alpha$ (in Abhängigkeit von α).

3. Aufgabe (4 Punkte)

Seien K ein Körper, $m, n, s \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n,m}$ und $B \in K^{n,s}$. Für $j = 1, \ldots, s$ bezeichne b_j die j-te Spalte von B.

Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $AX = B$ genau dann mindestens eine Lösung $\widehat{X} \in K^{m,s}$ hat, wenn

$$\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}([A, b_1]) = \operatorname{Rang}([A, b_2]) = \ldots = \operatorname{Rang}([A, b_s])$$

gilt. Unter welcher Bedingung ist diese Lösung eindeutig?

4. Aufgabe (4 Punkte)

Seien die Bezeichnungen wie in der Tutoriumsaufgabe 6-2 . Zeigen Sie $\operatorname{Rang}(M(a, b)) \in \{0, 2\}$.

Gesamtpunktzahl: 20