Technische Universität Berlin SoSe 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS13/LinAlg1/`
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. A. Międlar Stand: 27. Mai 2013

Lineare Algebra I – Hausaufgabe 7

Abgabe: 03.06.2013 **vor** der Übung

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

1.) Bestimmen Sie alle Fehlstände, die Anzal der Fehlstände k und das Signum $sgn(\sigma) := (-1)^k$ von $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

2.) Berechnen Sie mit der Leibnizformel die Determinante von

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

1.) Berechnen Sie mit Hilfe der Elementarmatrizen die Determinante der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 14 & 13 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.) Berechnen Sie die Determinante von $B = \begin{bmatrix} e_n & e_{n-1} & \dots & e_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{n,n}$, wobei e_j die j-te Spalte der Einheitsmatrix ist.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, S_n die Menge aller Permutationen von $\{1, 2, \dots, n\}$. Eine Permutation $\sigma \in S_n$, für die eine Teilmenge $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ mit $r \geq 1$ Elementen existiert, so dass

$$\sigma(i_k) = i_{k+1} \text{ für } k = 1, 2, \dots, r-1, \quad \sigma(i_r) = i_1, \quad \sigma(i) = i \text{ für } i \notin \{i_1, \dots, i_r\},$$

nennen wir einen *Zykel* (genauer einen r-*Zykel*) und schreiben $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_r)$.

1.) Zeigen Sie, dass $(i_1, \ldots, i_r) = (i_1, \ldots, i_s) \circ (i_s, \ldots, i_r)$ für $1 < s < r$ gilt. Folgern Sie hieraus, dass für $r \geq 2$ jeder r-Zykel als Produkt von $r-1$ Transpositionen geschrieben werden kann.

2.) Bestimmen Sie die Inverse eines Zykels $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \in S_n$.

3.) Seien $\sigma_1 = (i_1, \ldots, i_r)$ und $\sigma_2 = (j_1, \ldots, j_s)$ mit $\{i_1, \ldots, i_r\} \cap \{j_1, \ldots, j_s) = \varnothing$. Zeigen Sie $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Beweisen Sie das folgende Lemma mit Hilfe der Signaturformel von Leibniz.

Lemma. *Seien R ein kommutativer Ring mit Eins, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in R$, $A_{12} \in R^{1,n}$ und $A_{22} \in R^{n,n}$. Dann gilt*

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & A_{12} \\ 0_{n,1} & A_{22} \end{bmatrix}\right) = \lambda \det(A_{22}).$$

Folgern Sie, dass mit den gleichen Voraussetzungen (und $A_{21} \in R^{n,1}$) auch gilt

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0_{1,n} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right) = \lambda \det(A_{22}).$$

Gesamtpunktzahl: 20