Technische Universität Berlin SoSe 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS13/LinAlg1/`
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. A. Międlar Stand: 6. Juni 2013

Lineare Algebra I – Hausaufgabe 10

Abgabe: 17.06.2013 **vor** der Übung

---

1. Aufgabe (2 Punkte)
Sei $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ und $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A ist $t^2 - \mathrm{Spur}(A)t + \det(A)$.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $n \geq 1$ und $p(t) = t^n + \beta_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \beta_0$. Dann

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & \ldots & -\beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

ist die Begleitmatrix von p. Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion für $n \geq 2$, dass

$$\det(C_p - \lambda I) = (-1)^n(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 + \ldots + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = (-1)^n p(\lambda).$$

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $P_A = \beta_n t^n + \beta_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \beta_0$ das charakteristische Polynom von invertierbare matrix $A \in R^{n,n}$. Zeigen Sie, dass

$$A^{-1} = -\frac{1}{\beta_0}(\beta_n A^{n-1} + \beta_{n-1}A^{n-2} + \ldots + \beta_1 I_n)$$

Hint: Satz von Cayley-Hamilton.

4. Aufgabe (5 Punkte)
Sei K ein Körper. Für $A = [a_{ij}] \in K^{n,n}$ ist $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$ die *Spur von A* (vgl. VL).
Seien $A, B \in K^{n,n}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

1.) Es gilt $\mathrm{Spur}(A+B) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B)$.

2.) Es gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

3.) Sind A und B ähnlich, so gilt $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(B)$.

4.) Ist $p = \prod_{j=1}^n (t-\mu_j) = t^n + \beta_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \beta_1 t + \beta_0 \in K[t]$, d.h. p hat die n Nullstellen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in K$, so gilt $\beta_{n-1} = -\sum_{j=1}^n \mu_j$.

5.) Ist $P_A = \prod\limits_{j=1}^{n} (t - \lambda_j)$, so ist $\mathrm{Spur}(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j$.

5. Aufgabe (5 Punkte)

Für $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{C}^{n,m}$ ist $A^H := \left[b_{ij}\right] \in \mathbb{C}^{m,n}$, wobei $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$.
Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$. Zeigen Sie:

1.) Ist $A^H = -A$, so sind die Eigenwerte von A rein imaginär.

2.) Ist $A^H = -A$, so gelten $\mathrm{Spur}(A^2) \leq 0$ und $(\mathrm{Spur}(A))^2 \leq 0$.

3.) Sind $A^H = A$ und $B^H = B$, so gilt $\mathrm{Spur}((AB)^2) \leq \mathrm{Spur}(A^2B^2)$.
Hinweis: Betrachten Sie die Matrix $AB - BA$.

Gesamtpunktzahl: 20