Lineare Algebra I – Hausaufgabe 10

Abgabe: 24.06.2013 **vor** der Übung

---

1. Aufgabe (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass für invertierbare Matrix $Z \in K^{n,n}$ Matrizen $A \in K^{n,n}$ und $Z^{-1}AZ \in K^{n,n}$ die gleiche Eigenwerte haben.

2. Aufgabe (6 Punkte)
Berechnen Sie die Eigenwerte und *alle* Eigenvektoren von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2-a & 2-a \\ 0 & 4-a & 2-a \\ 0 & -4+2a & -2+2a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{3,3}.$$

Definition:
Sei $A \in K^{n,n}$. Das *Minimalpolynom* $m_A(X)$ der Matrix A ist das eindeutig bestimmte nomierte (höchster Koeffizient ist 1) Polynom kleinsten Grades mit $m_A(A) = 0$.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass λ ist Eigenwert von $A \in K^{n,n}$ genau dann, wenn λ Nullstelle des Minimalpolynoms $m_A(X)$ von A ist.
Hint: TA 10–1. Sie brauchen auch Bedingung, dass $p_A(X)|[m(X)]^n$.

4. Aufgabe (3 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n} \subseteq \mathbb{C}^{n,n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $x \in \mathbb{C}^{n,1}$. Zeigen Sie, dass auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{x}$ ist.

5. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n} \subseteq \mathbb{C}^{n,n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $x \in \mathbb{C}^{n,1}$. Zeigen Sie, dass

1.) $\frac{1}{\lambda}$ ist ein Eigenwert von A^{-1} mit Eigenvektor x,

2.) wenn $A^{-1} = A^T$ die Eigenwerte von A sind auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene.

Hint: Für Aufgabe 5.1 benutzen Sie TA 10–2 und für Aufgabe 5.2 benutzen Sie Aufgabe 4 und Aufgabe 5.1.

Gesamtpunktzahl: 20