Technische Universität Berlin SoSe 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS13/LinAlg1/`
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. A. Międlar Stand: 21. Juni 2013

Lineare Algebra I – Hausaufgabe 11

Abgabe: 01.07.2013 **vor** der Übung

---

1. Aufgabe (6 Punkte)
Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, Ω eine nichtleere Menge und $\mathrm{Abb}(\Omega, V)$ die Menge aller Abbildungen von Ω nach V.
Auf $\mathrm{Abb}(\Omega, V)$ werden Addition und skalare Multiplikation „punktweise" definiert, d.h. für $f, g \in \mathrm{Abb}(\Omega, V)$ und $\lambda \in K$ sind $f + g$ und $\lambda \cdot f$ definiert durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad \forall\, x \in \Omega, \qquad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall\, x \in \Omega.$$

1.) Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Abb}(\Omega, V), +, \cdot)$ ein K-Vektorraum ist.

2.) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume von $\mathrm{Abb}(V, V)$ sind:

   a) $M_1 := \{f \in \mathrm{Abb}(V, V) \mid f \text{ bijektiv}\}$,

   b) $M_2 := \{f \in \mathrm{Abb}(V, V) \mid f \text{ nicht bijektiv}\}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

1.) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $\{[1+\alpha, 2]^T, [1, 2+\alpha]^T\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^{2,1}$ ist.

2.) Seien K ein Körper und $a_1, \ldots, a_n \in K^{n,1}$. Zeigen Sie, dass $a_1, \ldots, a_n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $\det([a_1, \ldots, a_n]) \neq 0$ ist.

3. Aufgabe (7 Punkte)
Seien die folgenden Matrizen aus $\mathbb{C}^{2,2}$ gegeben:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.) Zeigen Sie, dass die Mengen $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ und $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ Basen von $\mathbb{C}^{2,2}$ sind.

2.) Berechnen Sie die Basisübergangsmatrizen von B nach C und von C nach B.

3.) Bestimmen Sie die Koordinaten von $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ bzgl. der Basis B, sowie die Koordinaten von A bzgl. der Basis C.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Seien V ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig und sei $A = \left[a_{ij}\right] \in K^{n,m}$. Für $j = 1, 2, \ldots, m$ seien

$$u_j := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \in V.$$

Zeigen Sie: $u_1, \ldots, u_m$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $\operatorname{Rang}(A) = m$ gilt.

Gesamtpunktzahl: 20