Technische Universität Berlin SoSe 2013
Institut für Mathematik http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS13/LinAlg1/
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. A. Międlar Stand: 28. Juni 2013

Lineare Algebra I – Hausaufgabe 12

Abgabe: 08.07.2013 **vor** der Übung

---

1. Aufgabe (6 Punkte)
Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, sowie U, W Untervektorräume von V mit

$$V = U + W = \{u + w \,|\, u \in U, w \in W\}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1.) $V = U \oplus W$, d.h. $V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$.

2.) Zu jedem $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte $u \in U$ und $w \in W$ mit $v = u + w$.

3.) Ist $u \in U \backslash \{0\}$ und $w \in W \backslash \{0\}$, so sind u und w linear unabhängig.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Sei K ein Körper und seien $\alpha \in K$ und $A \in K^{n,n}$ gegeben. Zeigen Sie, dass die beiden Abbildungen

$$f_1 : K[t] \to K, \quad p \mapsto p(\alpha), \quad \text{und} \quad f_2 : K[t] \to K^{n,n}, \quad p \mapsto p(A),$$

linear sind und rechtfertigen Sie damit den Namen *Einsetzhomomorphismus* für diese Abbildungen.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Seien K ein Körper, V, W zwei K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(V, W)$ mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum ist.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : K^{n,n} \to K^{n,n}$, $A \mapsto T^{-1}AT$, ein (Vektorraum-)Isomorphismus ist.

Gesamtpunktzahl: 20