Wie berechne ich die darstellende Matrix?

Richard Sieg

Vorgegeben:
Eine lineare Abbildung $F : V \to W$, wobei V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K mit Basen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ sind.
Gesucht:
Darstellende Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F) \in K^{m,n}$.
Berechnung:
Die j-te Spalte a_j von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$ $(j = 1, \dots, n)$ bestimmt man wie folgt:

1. Bestimme $F(v_j) \in W$.
2. Stelle $F(v_j)$ als Linearkombination der Basisvektoren aus $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ dar:

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \, , a_{ij} \in K$$

3. Die j-te Spalte enthält nun diese Koordinaten: $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T \in K^m$.

MERKE:

Die darstellende Matrix enthält als Spalten die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ bezüglich $\mathcal{B}'$.

Spezialfall: Transformationsmatrizen

Transformationsmatrizen stellen einen Basiswechsel dar (daher heißen sie auch manchmal Basisübergangsmatrizen). Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Basen eines Vektorraums V. Wir setzen:

$$T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V).$$

Im Fall $V = K^n$ ist die Transformationsmatrix *in* die kanonische Basis (also $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$) besonders einfach: die Spalten der Matrix sind einfach die Basisvektoren aus der anderen Basis. (Überlege dir kurz, warum das so ist)