Rang, Äquivalenz, lineare Gleichungen

Lineare Algebra I

Kapitel 6

14. Mai 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/~holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004 (ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Rang

Definition.
Die Anzahl r der Pivotpositionen in der TNF von $A \in K^{n,m}$ wird der Rang von A genannt und $\mathrm{Rang}(A)$ bezeichnet.

Rang

Definition.

Die Anzahl r der Pivotpositionen in der TNF von $A \in K^{n,m}$ wird der Rang von A genannt und $\mathrm{Rang}(A)$ bezeichnet.

Eigenschaften vom Rang

1. $\mathrm{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Rang

Definition.

Die Anzahl r der Pivotpositionen in der TNF von $A \in K^{n,m}$ wird der Rang von A genannt und $\mathrm{Rang}(A)$ bezeichnet.

Eigenschaften vom Rang

1. $\mathrm{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.
2. $A \in K^{n,n}$ ist invertierbar genau dann wenn $\mathrm{Rang}(A) = n$.

Rang

Definition.
Die Anzahl r der Pivotpositionen in der TNF von $A \in K^{n,m}$ wird der Rang von A genannt und $\mathrm{Rang}(A)$ bezeichnet.

Eigenschaften vom Rang

1. $\mathrm{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.
2. $A \in K^{n,n}$ ist invertierbar genau dann wenn $\mathrm{Rang}(A) = n$.
3. Ist $A = BC$, so gilt $\mathrm{Rang}(A) \leq \mathrm{Rang}(B)$.

Rang

Definition.

Die Anzahl r der Pivotpositionen in der TNF von $A \in K^{n,m}$ wird der Rang von A genannt und $\mathrm{Rang}(A)$ bezeichnet.

Eigenschaften vom Rang

1. $\mathrm{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.
2. $A \in K^{n,n}$ ist invertierbar genau dann wenn $\mathrm{Rang}(A) = n$.
3. Ist $A = BC$, so gilt $\mathrm{Rang}(A) \leq \mathrm{Rang}(B)$.

Beweis. Sei $Q \in GL_n(K)$, so dass QB in TNF ist. Dann $QA = QBC$. In der Matrix QBC sind höchstens die ersten $\mathrm{Rang}(B)$ Zeilen von Null verscheiden. Die TNF von QA ist gleich der TNF von A. Somit können in der TNF von A ebenfalls höchstens die ersten $\mathrm{Rang}(B)$ Zeilen von Null verschieden sein. Also $\mathrm{Rang}(A) \leq \mathrm{Rang}(B)$.

Weitere Eigenschaften von Rang

4. Es gibt Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit

$$QAZ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

genau dann wenn $\mathrm{Rang}(A) = r$.

Weitere Eigenschaften von Rang

4. Es gibt Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit

$$QAZ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

genau dann wenn $\mathrm{Rang}(A) = r$.

Beweis. Ist $\mathrm{Rang}(A) = r = 0$, dann ist $A = 0$. Sonst gibt es $Q \in GL_n(K)$ so dass QA in TNF ist. Es gibt dann eine Permutationsmatrix $P \in K^{n,n}$, so dass

$$PA^TQ^T = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline V & 0 \end{array}\right],$$

wobei $V \in K^{m-r,r}$.

Weitere Eigenschaften von Rang

4. Es gibt Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit

$$QAZ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

genau dann wenn $\mathrm{Rang}(A) = r$.

Beweis. Ist $\mathrm{Rang}(A) = r = 0$, dann ist $A = 0$. Sonst gibt es $Q \in GL_n(K)$ so dass QA in TNF ist. Es gibt dann eine Permutationsmatrix $P \in K^{n,n}$, so dass

$$PA^TQ^T = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline V & 0 \end{array}\right],$$

wobei $V \in K^{m-r,r}$. Nehmen wir nun

$$Y = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline -V & I_{m-r} \end{array}\right].$$

Es folgt

$$YPA^TQ^T = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

Mit $Z = P^TY^T$ ergibt sich das Resultat.

Äquivalenz von Matrizen

Definition.
Zwei Matrizen A, $B \in K^{n,m}$ heißen äquivalent, wenn es Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit $A = QBZ$ gibt.

Äquivalenz von Matrizen

Definition.
Zwei Matrizen A, $B \in K^{n,m}$ heißen äquivalent, wenn es Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit $A = QBZ$ gibt.

- Reflexivität: $A = QAZ$ mit

Äquivalenz von Matrizen

Definition.
Zwei Matrizen A, $B \in K^{n,m}$ heißen äquivalent, wenn es Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit $A = QBZ$ gibt.

- Reflexivität: $A = QAZ$ mit $Q = I_n$ und $Z = I_m$.

Äquivalenz von Matrizen

Definition.
Zwei Matrizen A, $B \in K^{n,m}$ heißen äquivalent, wenn es Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit $A = QBZ$ gibt.

- Reflexivität: $A = QAZ$ mit $Q = I_n$ und $Z = I_m$.
- Symmetrie: Ist $A = QBZ$, dann ist

Äquivalenz von Matrizen

Definition.
Zwei Matrizen A, $B \in K^{n,m}$ heißen äquivalent, wenn es Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit $A = QBZ$ gibt.

- Reflexivität: $A = QAZ$ mit $Q = I_n$ und $Z = I_m$.
- Symmetrie: Ist $A = QBZ$, dann ist $B = Q^{-1}AZ^{-1}$.

Äquivalenz von Matrizen

Definition.
Zwei Matrizen A, $B \in K^{n,m}$ heißen äquivalent, wenn es Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit $A = QBZ$ gibt.

- Reflexivität: $A = QAZ$ mit $Q = I_n$ und $Z = I_m$.
- Symmetrie: Ist $A = QBZ$, dann ist $B = Q^{-1}AZ^{-1}$.
- Reflexivität: Sind $A = Q_1BZ_1$, $B = Q_2CZ_2$, dann ist

Äquivalenz von Matrizen

Definition.
Zwei Matrizen A, $B \in K^{n,m}$ heißen äquivalent, wenn es Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit $A = QBZ$ gibt.

- Reflexivität: $A = QAZ$ mit $Q = I_n$ und $Z = I_m$.
- Symmetrie: Ist $A = QBZ$, dann ist $B = Q^{-1}AZ^{-1}$.
- Reflexivität: Sind $A = Q_1BZ_1$, $B = Q_2CZ_2$, dann ist $A = (Q_1Q_2)C(Z_2Z_1)$.

Äquivalenz von Matrizen

Definition.
Zwei Matrizen $A, B \in K^{n,m}$ heißen äquivalent, wenn es Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit $A = QBZ$ gibt.

- Reflexivität: $A = QAZ$ mit $Q = I_n$ und $Z = I_m$.
- Symmetrie: Ist $A = QBZ$, dann ist $B = Q^{-1}AZ^{-1}$.
- Reflexivität: Sind $A = Q_1 B Z_1$, $B = Q_2 C Z_2$, dann ist $A = (Q_1 Q_2) C (Z_2 Z_1)$.

Frage: Was bildet eine vollständige Menge von Repräsentanten dieser Äquivalenz?

Äquivalenz von Matrizen

Definition.
Zwei Matrizen A, $B \in K^{n,m}$ heißen äquivalent, wenn es Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit $A = QBZ$ gibt.

- Reflexivität: $A = QAZ$ mit $Q = I_n$ und $Z = I_m$.
- Symmetrie: Ist $A = QBZ$, dann ist $B = Q^{-1}AZ^{-1}$.
- Reflexivität: Sind $A = Q_1BZ_1$, $B = Q_2CZ_2$, dann ist $A = (Q_1Q_2)C(Z_2Z_1)$.

Frage: Was bildet eine vollständige Menge von Repräsentanten dieser Äquivalenz?

Antwort: Die Menge

$$\left\{ \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in K^{n,m} : r \leq \min\{n, m\} \right\}.$$

Lineare Gleichungssysteme

(i) Ein lineares Gleichungssystem über K hat die Form

$$Ax = b \tag{1}$$

mit $A = [a_{ij}] \in K^{n,m}$, $b = [b_i] \in K^{n,1}$, $x = [x_j] \in K^{m,1}$. Das sind n Gleichungen in m Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme

(i) Ein lineares Gleichungssystem über K hat die Form

$$Ax = b \tag{1}$$

mit $A = [a_{ij}] \in K^{n,m}$, $b = [b_i] \in K^{n,1}$, $x = [x_j] \in K^{m,1}$. Das sind n Gleichungen in m Unbekannten:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n. \end{array}$$

(ii) Jedes $x \in K^{m,1}$, welches (1) erfüllt, heißt Lösung des linearen Gleichungssystems (1).

Lineare Gleichungssysteme

(i) Ein lineares Gleichungssystem über K hat die Form

$$Ax = b \tag{1}$$

mit $A = [a_{ij}] \in K^{n,m}$, $b = [b_i] \in K^{n,1}$, $x = [x_j] \in K^{m,1}$. Das sind n Gleichungen in m Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

(ii) Jedes $x \in K^{m,1}$, welches (1) erfüllt, heißt Lösung des linearen Gleichungssystems (1).

(iii) Die Menge aller Lösungen des linearen Gleichungssystems (1) heißt Lösungsmenge von (1). Die Lösungsmenge von (1) ist also eine Teilmenge von $K^{m,1}$.

Lineare Gleichungssysteme

(i) Ein lineares Gleichungssystem über K hat die Form

$$Ax = b \tag{1}$$

mit $A = [a_{ij}] \in K^{n,m}$, $b = [b_i] \in K^{n,1}$, $x = [x_j] \in K^{m,1}$. Das sind n Gleichungen in m Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

(ii) Jedes $x \in K^{m,1}$, welches (1) erfüllt, heißt Lösung des linearen Gleichungssystems (1).

(iii) Die Menge aller Lösungen des linearen Gleichungssystems (1) heißt Lösungsmenge von (1). Die Lösungsmenge von (1) ist also eine Teilmenge von $K^{m,1}$.

(iv) Falls $b = 0$, so heißt das Gleichungssystem homogen. Zu jedem Gleichungssystem der Form (1) gibt es das zugeordnete homogene System

$$Ax = 0. \tag{2}$$

Homogene und inhomogene Gleichungssysteme

Die Menge aller Lösungen von $Ax = b$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(A, b)$.

Lemma

Ist x eine Lösung von $Ax = b$ und $\mathcal{L}(A, 0)$ die Menge aller Lösungen des zugeordneten homogenen Systems $Ax = 0$, so ist

$$\mathcal{L}(A, b) = \{x + z \mid z \in \mathcal{L}(A, 0)\}$$

die Lösungsmenge von $Ax = b$.

Homogene und inhomogene Gleichungssysteme

Die Menge aller Lösungen von $Ax = b$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(A, b)$.

Lemma

Ist x eine Lösung von $Ax = b$ und $\mathcal{L}(A, 0)$ die Menge aller Lösungen des zugeordneten homogenen Systems $Ax = 0$, so ist

$$\mathcal{L}(A, b) = \{x + z \mid z \in \mathcal{L}(A, 0)\}$$

die Lösungsmenge von $Ax = b$.

Beweis. Sei $z \in \mathcal{L}(A, 0)$, so gilt

$$A(x + z) = Ax + Az = b + 0 = b.$$

Umgekehrt: Ist $\tilde{x}$ eine Lösung von $Ax = b$, dann müssen wir ein $z \in \mathcal{L}(A, 0)$ finden, so dass $\tilde{x} = x + z$ Lösung von $A\tilde{x} = b$ ist. Wir zeigen, dass $z = \tilde{x} - x$ diese Anforderung erfüllt, denn es ist Lösung des homogenen Systems:

$$A(\tilde{x} - x) = A\tilde{x} - Ax = b - b = 0.$$

Äquivalente Umformungen

Lemma

Sei $A \in K^{n,n}$ und $b \in K^{n,1}$. Ist $T \in K^{n,n}$ invertierbar, so sind die Lösungsmengen von $Ax = b$ und $TAx = Tb$ identisch.

Äquivalente Umformungen

Lemma

Sei $A \in K^{n,n}$ und $b \in K^{n,1}$. Ist $T \in K^{n,n}$ invertierbar, so sind die Lösungsmengen von $Ax = b$ und $TAx = Tb$ identisch.

Beweis. Sei x Lösung von $Ax = b$ dann gilt $TAx = Tb$. Also ist x auch Lösung von $TAx = Tb$. Umgekehrt sei y eine Lösung von $(TA)x = Tb$, d.h. $(TA)y = Tb$, also auch

$$T^{-1}(TA)y = T^{-1}(Tb)$$

und

$$Ay = b\,,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Äquivalente Umformungen

Lemma
Sei $A \in K^{n,n}$ und $b \in K^{n,1}$. Ist $T \in K^{n,n}$ invertierbar, so sind die Lösungsmengen von $Ax = b$ und $TAx = Tb$ identisch.

Beweis. Sei x Lösung von $Ax = b$ dann gilt $TAx = Tb$. Also ist x auch Lösung von $TAx = Tb$. Umgekehrt sei y eine Lösung von $(TA)x = Tb$, d.h. $(TA)y = Tb$, also auch

$$T^{-1}(TA)y = T^{-1}(Tb)$$

und

$$Ay = b\,,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

NB: Wir können also die Matrix $A \in K^{n,m}$ auf TNF bringen, ohne die Lösungsmenge zu ändern.

Reduktion auf TNF

Nach der Reduktion bekommen wir das System $TAx = Tb$:

$$\left[\begin{array}{c|cc|cc|cc|c|cc}
 & 1 & * & 0 & * & 0 & * & & 0 & * \\
\cline{2-3}
 & & & 1 & * & 0 & * & & \vdots & * \\
\cline{4-5}
0 & & 0 & & & 1 & * & & \vdots & * \\
\cline{6-7}
 & & & & 0 & & 0 & \ddots & 0 & * \\
 & & & & & & & & 1 & * \\
\cline{9-10}
 & & & & & & & & & 0
\end{array}\right] x = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix}.$$

Reduktion auf TNF

Nach der Reduktion bekommen wir das System $TAx = Tb$:

$$\left[\begin{array}{c|cc|cc|cc|c|cc}
 & 1 & * & 0 & * & 0 & * & & 0 & * \\ \cline{2-3}
 & & & 1 & * & 0 & * & & \vdots & * \\ \cline{4-5}
0 & & 0 & & & 1 & * & & 0 & * \\ \cline{6-7}
 & & & & 0 & & 0 & \ddots & 1 & * \\ \cline{9-10}
 & & & & & & & & & 0
\end{array}\right] x = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix}.$$

Es gibt eine Umordnung der Komponenten von x, welche durch eine Permutationsmatrix gegeben ist, so dass unser Gleichungssystem diese Form hat:

$$\underbrace{TAP^\top}_{C}\underbrace{Px}_{y} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \\ \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix} = \underbrace{Tb}_{d}.$$