Die Lösung linearer Gleichungssysteme

Lineare Algebra I

Kapitel 6

15. Mai 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/~holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Lineare Gleichungssysteme

(i) Ein lineares Gleichungssystem über K hat die Form

$$Ax = b \tag{1}$$

mit $A = [a_{ij}] \in K^{n,m}$, $b = [b_i] \in K^{n,1}$, $x = [x_j] \in K^{m,1}$. Das sind n Gleichungen in m Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme

(i) Ein lineares Gleichungssystem über K hat die Form

$$Ax = b \tag{1}$$

mit $A = [a_{ij}] \in K^{n,m}$, $b = [b_i] \in K^{n,1}$, $x = [x_j] \in K^{m,1}$. Das sind n Gleichungen in m Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

(ii) Jedes $x \in K^{m,1}$, welches (1) erfüllt, heißt Lösung des linearen Gleichungssystems (1).

Lineare Gleichungssysteme

(i) Ein lineares Gleichungssystem über K hat die Form

$$Ax = b \tag{1}$$

mit $A = [a_{ij}] \in K^{n,m}$, $b = [b_i] \in K^{n,1}$, $x = [x_j] \in K^{m,1}$. Das sind n Gleichungen in m Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

(ii) Jedes $x \in K^{m,1}$, welches (1) erfüllt, heißt Lösung des linearen Gleichungssystems (1).

(iii) Die Menge aller Lösungen des linearen Gleichungssystems (1) heißt Lösungsmenge von (1). Die Lösungsmenge von (1) ist also eine Teilmenge von $K^{m,1}$.

Lineare Gleichungssysteme

(i) Ein lineares Gleichungssystem über K hat die Form

$$Ax = b \tag{1}$$

mit $A = [a_{ij}] \in K^{n,m}$, $b = [b_i] \in K^{n,1}$, $x = [x_j] \in K^{m,1}$. Das sind n Gleichungen in m Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

(ii) Jedes $x \in K^{m,1}$, welches (1) erfüllt, heißt Lösung des linearen Gleichungssystems (1).

(iii) Die Menge aller Lösungen des linearen Gleichungssystems (1) heißt Lösungsmenge von (1). Die Lösungsmenge von (1) ist also eine Teilmenge von $K^{m,1}$.

(iv) Falls $b = 0$, so heißt das Gleichungssystem homogen. Zu jedem Gleichungssystem der Form (1) gibt es das zugeordnete homogene System

$$Ax = 0. \tag{2}$$

Homogene und inhomogene Gleichungssysteme

Die Menge aller Lösungen von $Ax = b$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(A, b)$.

Lemma

Ist x eine Lösung von $Ax = b$ und $\mathcal{L}(A, 0)$ die Menge aller Lösungen des zugeordneten homogenen Systems $Ax = 0$, so ist

$$\mathcal{L}(A, b) = \{x + z \mid z \in \mathcal{L}(A, 0)\}$$

die Lösungsmenge von $Ax = b$.

Homogene und inhomogene Gleichungssysteme

Die Menge aller Lösungen von $Ax = b$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(A, b)$.

Lemma

Ist x eine Lösung von $Ax = b$ und $\mathcal{L}(A, 0)$ die Menge aller Lösungen des zugeordneten homogenen Systems $Ax = 0$, so ist

$$\mathcal{L}(A, b) = \{x + z \mid z \in \mathcal{L}(A, 0)\}$$

die Lösungsmenge von $Ax = b$.

Beweis. Sei $z \in \mathcal{L}(A, 0)$, so gilt

$$A(x + z) = Ax + Az = b + 0 = b.$$

Umgekehrt: Ist $\tilde{x}$ eine Lösung von $Ax = b$, dann müssen wir ein $z \in \mathcal{L}(A, 0)$ finden, so dass $\tilde{x} = x + z$ Lösung von $A\tilde{x} = b$ ist. Wir zeigen, dass $z = \tilde{x} - x$ diese Anforderung erfüllt, denn es ist Lösung des homogenen Systems:

$$A(\tilde{x} - x) = A\tilde{x} - Ax = b - b = 0.$$

Äquivalente Umformungen

Lemma

Sei $A \in K^{n,n}$ und $b \in K^{n,1}$. Ist $T \in K^{n,n}$ invertierbar, so sind die Lösungsmengen von $Ax = b$ und $TAx = Tb$ identisch.

Äquivalente Umformungen

Lemma

Sei $A \in K^{n,n}$ und $b \in K^{n,1}$. Ist $T \in K^{n,n}$ invertierbar, so sind die Lösungsmengen von $Ax = b$ und $TAx = Tb$ identisch.

Beweis. Sei x Lösung von $Ax = b$ dann gilt $TAx = Tb$. Also ist x auch Lösung von $TAx = Tb$. Umgekehrt sei y eine Lösung von $(TA)x = Tb$, d.h. $(TA)y = Tb$, also auch

$$T^{-1}(TA)y = T^{-1}(Tb)$$

und

$$Ay = b\,,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Äquivalente Umformungen

Lemma
Sei $A \in K^{n,n}$ und $b \in K^{n,1}$. Ist $T \in K^{n,n}$ invertierbar, so sind die Lösungsmengen von $Ax = b$ und $TAx = Tb$ identisch.

Beweis. Sei x Lösung von $Ax = b$ dann gilt $TAx = Tb$. Also ist x auch Lösung von $TAx = Tb$. Umgekehrt sei y eine Lösung von $(TA)x = Tb$, d.h. $(TA)y = Tb$, also auch

$$T^{-1}(TA)y = T^{-1}(Tb)$$

und

$$Ay = b\,,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

NB: Wir können also die Matrix $A \in K^{n,m}$ auf TNF bringen, ohne die Lösungsmenge zu ändern.

Reduktion auf TNF

Nach der Reduktion bekommen wir das System $TAx = Tb$:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
0 &
\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array} &
\begin{array}{c|c} 0 & \\ 1 & * \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array} &
\begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & * \\ 1 & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array} &
\ddots &
\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \\ 1 & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}
\end{array}\right] x = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix}.$$

Reduktion auf TNF

Nach der Reduktion bekommen wir das System $TAx = Tb$:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & \begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c|c} 0 & \\ 1 & * \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & * \\ 1 & \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & \\ 0 & * \\ 1 & \\ \hline \end{array} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0
\end{array}\right] x = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix}.$$

Es gibt eine Umordnung der Komponenten von x, welche durch eine Permutationsmatrix gegeben ist, so dass unser Gleichungssystem diese Form hat:

$$\underbrace{TAP^\top}_{C} \underbrace{Px}_{y} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & * \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \\ \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix} = \underbrace{Tb}_{d}.$$

TNF und das Lösen der Gleichungssysteme I

Dabei ist $y = [y_1, \ldots, y_m]^\top = Px, \; C = TAP^\top, \; d = Tb.$

TNF und das Lösen der Gleichungssysteme I

Dabei ist $y = [y_1, \ldots, y_m]^\top = Px,\ C = TAP^\top,\ d = Tb.$

Wie sieht die Permutationsmatrix aus?

$$
P^\top = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
0 & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & & & \\ \hline
1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ \hline
0 & & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & & \\ \hline
0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ \hline
\vdots & & & \ddots & \\ \hline
0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ \hline
0 & & & & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}
\end{array}\right]
$$

TNF und das Lösen der Gleichungssysteme II

Im folgenden bezeichne $[A, b]$ die $n \times (m + 1)$ Blockmatrix die durch Anhängen von b hinter A ensteht. Wir nennen $[A, b]$ auch die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Lemma

Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat mindestens eine Lösung, genau dann wenn

$$\mathrm{Rang} A = \mathrm{Rang}[A, b].$$

TNF und das Lösen der Gleichungssysteme II

Im folgenden bezeichne $[A, b]$ die $n \times (m + 1)$ Blockmatrix die durch Anhängen von b hinter A ensteht. Wir nennen $[A, b]$ auch die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Lemma

Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat mindestens eine Lösung, genau dann wenn

$$\mathrm{Rang} A = \mathrm{Rang}[A, b].$$

Beweis. Es reicht, die Aussage für das Gleichungssystem $Cx = d$ in der letzteren Form zu zeigen, denn $\mathrm{Rang}\, C = \mathrm{Rang} A$ und $\mathrm{Rang}[C, d] = \mathrm{Rang}[A, b]$.

TNF und das Lösen der Gleichungssysteme II

Im folgenden bezeichne $[A, b]$ die $n \times (m+1)$ Blockmatrix die durch Anhängen von b hinter A ensteht. Wir nennen $[A, b]$ auch die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Lemma

Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat mindestens eine Lösung, genau dann wenn

$$\mathrm{Rang} A = \mathrm{Rang}[A, b].$$

Beweis. Es reicht, die Aussage für das Gleichungssystem $Cx = d$ in der letzteren Form zu zeigen, denn $\mathrm{Rang}\, C = \mathrm{Rang} A$ und $\mathrm{Rang}[C, d] = \mathrm{Rang}[A, b]$.

Falls $\mathrm{Rang}(C) = \mathrm{Rang}[C, d]$, so ist $\tilde{b}_{r+1} = \cdots \tilde{b}_m = 0$ und damit ist

$$[y_1, \cdots, y_m]^\top = \left[\tilde{b}_1, \cdots \tilde{b}_r, 0, \cdots, 0\right]^\top$$

eine Lösung. (Es kann noch mehr Lösungen geben.)
Falls $\mathrm{Rang}(A) < \mathrm{Rang}[A, b]$, so ist eines der $\tilde{b}_{r+1}, \cdots, \tilde{b}_m$ nicht gleich 0 und damit hat das System keine Lösung.

Gauß'scher Algorithmus

Ein Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

(1) Sei $A' = [A, b]$ die erweiterte Koeffizientenmatrix.
Transformiere A und A' auf TNF B und B'.

(2) Ist $\mathrm{Rang}(A) < Rang(A')$, so besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.

(3) Ist $r = \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A')$, so bilde das assoziierte Gleichungssystem

$$Cy = d \quad \text{mit} \quad C = QAP^\top, \; y = Px, \; d = Qb = [\tilde{b}_i].$$

Eine spezielle Lösung ist

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Gauß'scher Algorithmus

(4) Bestimme alle Lösungen des homogenen Systems $Cy = 0$ durch Rückwärtseinsetzen

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=r+1}^{m} c_{1j} y_j \\ \vdots \\ -\sum_{j=r+1}^{m} c_{rj} y_j \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad \text{für beliebige} \quad y_{r+1}, \cdots, y_m \in K. \qquad (4)$$

Die Lösungsmenge ist:

$$\mathcal{L} = \left\{ x = P^\top y \mid y = \tilde{y} + \hat{y},\ \tilde{y} \text{ wie in } (3),\ \hat{y} \text{ wie in } (4) \right\}.$$