Die Determinante

Lineare Algebra I

Kapitel 7

21. Mai 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/˜holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Permutationen

Definition

Eine Permutation der Zahlen $\{1, \cdots, n\}$ ist eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$.

Permutationen

Definition

Eine Permutation der Zahlen $\{1, \cdots, n\}$ ist eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$.

Die Menge aller Permutationen von $\{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ bezeichnen wir mit S_n.

Permutationen

Definition

Eine Permutation der Zahlen $\{1, \cdots, n\}$ ist eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$.

Die Menge aller Permutationen von $\{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ bezeichnen wir mit S_n.

Sei $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$ und P_σ eine Permutationsmatrix, so ist $P_\sigma v = w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ und

$$\sigma(i) = w_i, \ i = 1, \cdots, n$$

gibt eine Permutation an.

Permutationen

Definition

Eine Permutation der Zahlen $\{1, \cdots, n\}$ ist eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$.

Die Menge aller Permutationen von $\{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ bezeichnen wir mit S_n.

Sei $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$ und P_σ eine Permutationsmatrix, so ist $P_\sigma v = w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ und

$$\sigma(i) = w_i, \ i = 1, \cdots, n$$

gibt eine Permutation an. Für $n = 3$ gibt es folgende Permutationen:

$$\begin{matrix} 123 & 213 & 312 \\ 132 & 231 & 321 \end{matrix}$$

Die Anzahl aller Permutationen von $\{1, \cdots, n\}$

Theorem

Die Anzahl der möglichen Permutationen von $\{1, \cdots, n\}$ ist $n\,! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$.

Die Anzahl aller Permutationen von $\{1, \cdots, n\}$

Theorem

Die Anzahl der möglichen Permutationen von $\{1, \cdots, n\}$ ist $n\,! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$.

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion.

I.A.: Für $n = 1$ gibt es nur eine Permutation

$$1\,! = 1.$$

Die Anzahl aller Permutationen von $\{1, \cdots, n\}$

Theorem

Die Anzahl der möglichen Permutationen von $\{1, \cdots, n\}$ ist $n\,! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$.

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion.

I.A.: Für $n = 1$ gibt es nur eine Permutation

$$1\,! = 1.$$

I.V.: Die Behauptung sei richtig für $n = k$.

Die Anzahl aller Permutationen von $\{1, \cdots, n\}$

Theorem

Die Anzahl der möglichen Permutationen von $\{1, \cdots, n\}$ ist $n\,! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$.

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion.

I.A.: Für $n = 1$ gibt es nur eine Permutation

$$1\,! = 1.$$

I.V.: Die Behauptung sei richtig für $n = k$.

I.S.: Sei $n = k + 1$, dann können wir für jede Permutation von $\{1, \cdots, k\}$, wovon es $k!$ Stück gibt, die Zahl $k + 1$ an jede beliebige Stelle setzen, also gibt es

$$(k+1) \cdot (k!) = (k+1)!$$

Permutationen.

Das Signum einer Permutation

Definition

Das Signum einer Permutation ist definiert durch

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & \text{bei gerader} \\ -1, & \text{bei ungerader} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{Anzahl von Paaren } (i,j) \\ \text{mit } i > j \text{ unf } \sigma(i) < \sigma(j)\,. \end{array}$$

Ansonsten ist $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

Das Signum einer Permutation

Definition

Das Signum einer Permutation ist definiert durch

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & \text{bei gerader} \\ -1, & \text{bei ungerader} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{Anzahl von Paaren } (i,j) \\ \text{mit } i > j \text{ unf } \sigma(i) < \sigma(j)\,. \end{array}$$

Ansonsten ist $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

Beispiel. $\{1,2,3,4,5\}, \quad \sigma_1 = 1\ 3\ 5\ 4\ 2, \quad \sigma_2 = 1\ 3\ 4\ 5\ 2$

σ_1 :

i	1	2	3	4	5
$\sigma(i)$	1	3	5	4	2

4 Paare
$\operatorname{sgn}\ (\sigma_1) = 1$

σ_2 :

i	1	2	3	4	5
$\sigma(i)$	1	3	4	5	2

3 Paare
$\operatorname{sgn}\ (\sigma_2) = -1.$

Die Determinante

Definition

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $A = [a_{ij}] \in R^{n,n}$ mit $n \geq 1$. Dann heißt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

die Determinante von A.

Die Determinante

Definition

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $A = [a_{ij}] \in R^{n,n}$ mit $n \geq 1$. Dann heißt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

die Determinante von A.
Dies ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \det \quad &: \quad R^{n,n} \to R \\ &: \quad A \longmapsto \det(A) \end{aligned}$$

Die Determinante

Definition

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $A = [a_{ij}] \in R^{n,n}$ mit $n \geq 1$.
Dann heißt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

die Determinante von A.
Dies ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \det \quad &: \quad R^{n,n} \to R \\ &: \quad A \longmapsto \det(A) \end{aligned}$$

Beispiel. Für $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in R^{2,2}$

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 = 1\,2 & \sigma_2 = 2\,1 \\ \operatorname{sgn}\sigma_1 = 1 & \operatorname{sgn}\sigma_2 = -1 \end{array}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Sarrus'sche Regel

Weiteres Beispiel. Für $A = [a_{ij}] \in R^{3,3}$ gilt die Regel von Sarrus:

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = 1\,2\,3 & \sigma_3 = 2\,1\,3 & \sigma_5 = 3\,1\,2 \\ \sigma_2 = 1\,3\,2 & \sigma_4 = 2\,3\,1 & \sigma_6 = 3\,2\,1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sgn}(\sigma_1) = +1 & \operatorname{sgn}(\sigma_3) = -1 & \operatorname{sgn}(\sigma_5) = +1 \\ \operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1 & \operatorname{sgn}(\sigma_4) = +1 & \operatorname{sgn}(\sigma_6) = -1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det(A) \quad = \quad & +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Eigenschaften der Determinante

Lemma

Sei $A \in R^{n,n}$

i) Ist A obere oder untere Dreiecksmatrix, so ist $\det(A) = a_{11} \cdots a_{n,n}$.

ii) Hat A eine Zeile oder Spalte von Nullen, so ist $\det(A) = 0$.

iii) Die Determinante einer Permutationsmatrix ist gleich dem Signum der zugehörigen Permutation.

Eigenschaften der Determinante

Lemma

Sei $A \in R^{n,n}$

i) Ist A obere oder untere Dreiecksmatrix, so ist $\det(A) = a_{11} \cdots a_{n,n}$.

ii) Hat A eine Zeile oder Spalte von Nullen, so ist $\det(A) = 0$.

iii) Die Determinante einer Permutationsmatrix ist gleich dem Signum der zugehörigen Permutation.

Beweis.

i) Sei $\sigma \in S_n,\ \sigma \neq 1\,2 \cdots n$, so gibt es ein i mit $i > \sigma(i)$. Also gilt für eine obere Dreiecksmatrix

$$a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = 0, \ \text{ da } a_{i,\sigma(i)} = 0\,.$$

Also bleibt nur

$$\det(A) = \underbrace{\operatorname{sgn}(1\,2\,3 \cdots n)}_{=1,\text{ da } 0 \text{ Paare}} \cdot a_{11} \cdots a_{nn} = a_{11} \cdots a_{nn}$$

Für untere Dreiecksmatrizen gilt der Beweis analog.

Eigenschaften der Determinante

ii) Falls A eine Nullzeile hat, so gilt $a_{k,l} = 0, \ l = 1, \cdots, n$, also ist in jedem der Produkte

$$a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

mindestens ein Faktor gleich 0. Für Nullspalten gilt das analog.

iii) Es gibt natürlich nur ein Produkt, welches ungleich Null ist; das ist $a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = 1$. Alle anderen sind 0 und damit folgt die Behauptung.

Eigenschaften der Determinante

ii) Falls A eine Nullzeile hat, so gilt $a_{k,l} = 0, \; l = 1, \cdots, n$, also ist in jedem der Produkte

$$a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

mindestens ein Faktor gleich 0. Für Nullspalten gilt das analog.

iii) Es gibt natürlich nur ein Produkt, welches ungleich Null ist; das ist $a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = 1$. Alle anderen sind 0 und damit folgt die Behauptung.

Determinanten von Elementarmatrizen. Die Determinanten der Elementarmatrizen $P_{ij}, M_i(\lambda), G_{ij}(\lambda)$ sind:

Eigenschaften der Determinante

ii) Falls A eine Nullzeile hat, so gilt $a_{k,l} = 0, \; l = 1, \cdots, n$, also ist in jedem der Produkte

$$a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

mindestens ein Faktor gleich 0. Für Nullspalten gilt das analog.

iii) Es gibt natürlich nur ein Produkt, welches ungleich Null ist; das ist $a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = 1$. Alle anderen sind 0 und damit folgt die Behauptung.

Determinanten von Elementarmatrizen. Die Determinanten der Elementarmatrizen $P_{ij}, M_i(\lambda), G_{ij}(\lambda)$ sind:

$$\det P_{ij} \quad = \quad -1,$$

Eigenschaften der Determinante

ii) Falls A eine Nullzeile hat, so gilt $a_{k,l} = 0,\ l = 1, \cdots, n$, also ist in jedem der Produkte

$$a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

mindestens ein Faktor gleich 0. Für Nullspalten gilt das analog.

iii) Es gibt natürlich nur ein Produkt, welches ungleich Null ist; das ist $a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = 1$. Alle anderen sind 0 und damit folgt die Behauptung.

Determinanten von Elementarmatrizen. Die Determinanten der Elementarmatrizen $P_{ij}, M_i(\lambda), G_{ij}(\lambda)$ sind:

$$\begin{aligned} \det P_{ij} &= -1, \\ \det M_i(\lambda) &= \lambda, \end{aligned}$$

Eigenschaften der Determinante

ii) Falls A eine Nullzeile hat, so gilt $a_{k,l} = 0,\ l = 1, \cdots, n$, also ist in jedem der Produkte

$$a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

mindestens ein Faktor gleich 0. Für Nullspalten gilt das analog.

iii) Es gibt natürlich nur ein Produkt, welches ungleich Null ist; das ist $a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = 1$. Alle anderen sind 0 und damit folgt die Behauptung.

Determinanten von Elementarmatrizen. Die Determinanten der Elementarmatrizen $P_{ij}, M_i(\lambda), G_{ij}(\lambda)$ sind:

$$\begin{aligned} \det P_{ij} &= -1, \\ \det M_i(\lambda) &= \lambda, \\ \det G_{ij}(\lambda) &= 1. \end{aligned}$$