# Die Determinante

Lineare Algebra I

Kapitel 7

22. Mai 2013

## Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/~holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

# Rechenregeln mit Determinanten

Sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n,n}$, wobei $\mathbb{K}$ ein Körper ist.

(a) Hat $A$ zwei gleiche Zeilen, so ist $\det A = 0$.

(b) Die Multiplikation einer Zeile von $A$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$ führt zur Multiplikation der Determinante mit $\lambda$.

$$\det\left(M_j(\lambda) \cdot A\right) = \lambda \det A = \det\left(M_j(\lambda)\right) \cdot \det A.$$

(c) Wenn man das Vielfache einer Zeile zu einer anderen addiert, so ändert sich die Determinante nicht.

$$\begin{aligned}
\det(G_{ij}(\lambda) \cdot A) \quad &= \quad \det A = \det\left(G_{ij}(\lambda)\right) \cdot \det A. \\
\det(G_{ij}^{\top}(\lambda) \cdot A) \quad &= \quad \det A = \det\left(G_{ij}^{\top}(\lambda)\right) \cdot \det A.
\end{aligned}$$

(d) Wenn man zwei Zeilen von $A$ vertauscht, so erhält man das Negative der Determinante.

$$\det(P_{ij} \cdot A) = -\det A = \det P_{ij} \cdot \det A$$

# Beweis von (a)

Wir verwenden die Notation: $\prod_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{1j} \cdots a_{nj}$ .

(a) Da $A$ zwei gleiche Zeilen hat, gibt es ein Indexpaar $i, i'$ mit

$$a_{i,j} = a_{i',j} \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n\,.$$

Für jedes $\sigma \in S_n$ führen wir eine neue Permutation ein:

$$\sigma'(l) = \begin{cases} \sigma(l) & l \neq i, i' \\ \sigma(i) & l = i' \\ \sigma(i') & l = i \end{cases}\,.$$

Dann ist $\sigma' \in S_n$ und $\mathrm{sgn}(\sigma) = -\,\mathrm{sgn}(\sigma')$, aber
$\prod_{l=1}^{n} a_{l,\sigma(l)} = \prod_{l=1}^{n} a_{l,\sigma'(l)}$.

# Beweis von (a)

Man kann sehr leicht zeigen, dass es gleich viele Permuationen mit positivem und negativen sgn gibt. Damit ergeben sich bei der Summe über alle Permutationen zwei Mengen, die mit positivem und die mit negativen sgn. Zu jedem $\sigma$ mit $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ gibt es $\sigma'$ mit $\operatorname{sgn}(\sigma') = -1$. Insgesamt ergibt sich in der Summe also 0 da $\prod_{l=1}^{n} a_{l,\sigma(l)} = \prod_{l=1}^{n} a_{l,\sigma'(l)}$.

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in S_n, \operatorname{sgn}(\sigma)=1} \left( \operatorname{sgn}(\sigma) \left( \prod_{l=1}^{n} a_{l,\sigma(l)} \right) + (\operatorname{sgn}(\sigma') \left( \prod_{l=1}^{n} a_{l,\sigma'(l)} \right) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

# Beweis von (b)

(b) Sei $\tilde{A} = M_j(\lambda) \cdot A = [\tilde{a}_{li}]$. Dann gilt: $\tilde{a}_{li} = \begin{cases} a_{li}, & l \neq j \\ \lambda a_{li}, & l = j. \end{cases}$ Also

$$\begin{aligned}
\det \tilde{A} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \tilde{a}_{1,\sigma(1)} \cdots \tilde{a}_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left( \prod_{l=1}^{n} \tilde{a}_{l,\sigma(l)} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left( \prod_{l=1, l \neq j}^{n} a_{l,\sigma(l)} \right) \cdot \underbrace{\tilde{a}_{j,\sigma(j)}}_{\lambda a_{j,\sigma(j)}} \\
&= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{l=1}^{n} a_{l,\sigma(l)} = \lambda \cdot \det A.
\end{aligned}$$

# Beweis von (c)

(c) Sei $\tilde{A} = G_{ij}(\lambda)A = [\tilde{a}_{ls}]$. Dann gilt: $\tilde{a}_{ls} = \begin{cases} a_{ls}, & l \neq j \\ a_{ls} + \lambda a_{is}, & l = j \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\det \tilde{A} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left( \prod_{l=1}^{n} \tilde{a}_{l,\sigma(l)} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left( \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} a_{l,\sigma(l)} \right) \cdot (a_{j,\sigma(j)} + \lambda a_{i,\sigma(j)}) \\
&= \left[ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{l=1}^{n} a_{l,\sigma(l)} \right] + \lambda \left[ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left( \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} a_{l,\sigma(l)} \right) a_{i,\sigma(j)} \right] \\
&= \det A + \lambda \det \hat{A},
\end{aligned}$$

# Beweise von (c) und (d)

wobei $\hat{A}$ zwei gleiche Zeilen hat und nach (a) folgt $\det \hat{A} = 0$, also

$$\det \tilde{A} = \det A \cdot 1 = \det A \cdot \underbrace{\det G_{ij}(\lambda)}_{1}.$$

Der Beweis für $G_{ij}^{\top}(\lambda)$ erfolgt analog.

# Beweise von (c) und (d)

wobei $\hat{A}$ zwei gleiche Zeilen hat und nach (a) folgt $\det \hat{A} = 0$, also

$$\det \tilde{A} = \det A \cdot 1 = \det A \cdot \underbrace{\det G_{ij}(\lambda)}_{1}.$$

Der Beweis für $G_{ij}^{\top}(\lambda)$ erfolgt analog.

(d)

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \\ &= G_{ij}(1) G_{ij}^{\top}(-1) G_{ij}(1) M_j(-1), \end{aligned}$$

# Beweis von (d) + wichtiges Theorem

Also folgt:

$$\begin{aligned}
\det(P_{ij}A) &= \det\left[G_{ij}(1)G_{ij}^{\top}(-1)G_{ij}(1)M_j(-1)A\right] \\
&= \det\left[G_{ij}(1)M_j(-1)A\right] = \det\left[M_j(-1)A\right] = -\det A.
\end{aligned}$$

# Beweis von (d) + wichtiges Theorem

Also folgt:

$$\begin{aligned} \det(P_{ij}A) &= \det\left[G_{ij}(1)G_{ij}^\top(-1)G_{ij}(1)M_j(-1)A\right] \\ &= \det\left[G_{ij}(1)M_j(-1)A\right] = \det\left[M_j(-1)A\right] = -\det A. \end{aligned}$$

## NB: Haupteigenschaften der Determinante

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$, so gilt

(a) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$,

(b) $\det A^\top = \det A$.

**Beweis:** nächstes Mal.