Die Determinante

Lineare Algebra I

Kapitel 7

28. Mai 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/˜holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Wichtige Eigenschaften von Determinanten

Theorem

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$, so gilt

(a) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$,

(b) $\det A^\top = \det A$.

Wichtige Eigenschaften von Determinanten

Theorem

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$, so gilt

(a) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$,

(b) $\det A^\top = \det A$.

Beweis: (a) A läßt sich als Produkt von Elementarmatrizen und einer Matrix in Treppennormalform schreiben, d.h., $A = S_1^{-1} \cdots S_t^{-1} \tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ entweder die Einheitsmatrix ist, oder mindestens eine Nullzeile hat, falls Rang $(A) < n$.

Wichtige Eigenschaften von Determinanten

Theorem

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$, so gilt

(a) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$,

(b) $\det A^\top = \det A$.

Beweis: (a) A läßt sich als Produkt von Elementarmatrizen und einer Matrix in Treppennormalform schreiben, d.h., $A = S_1^{-1} \cdots S_t^{-1} \tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ entweder die Einheitsmatrix ist, oder mindestens eine Nullzeile hat, falls Rang $(A) < n$.

Falls $\tilde{A}$ eine Nullzeile hat, so hat auch $S_t \cdots S_1 A \cdot B = \tilde{A}B$ eine Nullzeile. Wegen $\det A = \pm\lambda \det \tilde{A}$ gilt für den Fall, dass $\tilde{A}$ eine Nullzeile hat,

$$\det \tilde{A} = 0 = \det A = \det \tilde{A}B = \det AB.$$

Wir können uns also auf den Fall $\det A \neq 0$ beschränken, d.h., $\tilde{A} = I_n$.

Beweis Teil II

Dann ist

$$\begin{aligned}
\det A \cdot \det B &= \det(S_1^{-1} \cdots S_t^{-1}) \det B = \det S_1^{-1} \cdots \det S_t^{-1} \cdot \det B\,, \\
\det AB &= \det(S_1^{-1} \cdots S_t^{-1} B) = \det S_1^{-1} \cdots \det S_t^{-1} \cdot \det B\,.
\end{aligned}$$

Beweis Teil II

Dann ist

$$\begin{aligned} \det A \cdot \det B &= \det(S_1^{-1} \cdots S_t^{-1}) \det B = \det S_1^{-1} \cdots \det S_t^{-1} \cdot \det B\,, \\ \det AB &= \det(S_1^{-1} \cdots S_t^{-1} B) = \det S_1^{-1} \cdots \det S_t^{-1} \cdot \det B\,. \end{aligned}$$

(b) Mit $A = S_1^{-1} \cdots S_t^{-1} \tilde{A}$ gilt

$$\begin{aligned} \det(A^\top) &= \det(S_1^{-1} \cdots S_t^{-1} \tilde{A})^\top = \begin{cases} \det(S_t^{-\top} \cdots S_1^{-\top}), & \tilde{A} = I \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \det S_t^{-\top} \cdots \det S_1^{-\top} \\ 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \det S_t^{-1} \cdots \det S_1^{-1} \\ 0 \end{cases} \\ &= \det A\,. \end{aligned}$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} \end{bmatrix} \\
&= 24 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -2 \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} \\
&= \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{2}{3}\right)\left(-\tfrac{3}{4}\right) \cdot 24 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0\,,
\end{aligned}
$$

da es drei gleiche Zeilen gibt.

Die Adjungte

Definition: Minor

Sei $A \in R^{n,n}$, $n \geq 2$. Dann heißt die Matrix $A(s,t) \in R^{n-1,n-1}$, die durch das Streichen der s-ten Zeile und der t-ten Spalte von A entsteht, ein Minor von A.

Definition : die Adjungte

Man bilde die Matrix $B = [b_{ij}]$ mit
$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(j,i)$, $i,j = 1,\ldots,n$.
B heißt Adjungte von A und wird auch als $\mathrm{Adj}(A)$ bezeichnet.

Theorem

Für eine Matrix $A \in R^{n,n}$, $n \geq 2$, ihre Determinante und ihre Adjungte gilt:

$$\det(A) \cdot I = A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \mathrm{Adj}(A) \cdot A.$$

Beweis

Sei $C = [c_{ij}] = \underbrace{\mathrm{adj}(A)}_{=[b_{ij}]} \cdot A$.

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \det A(k,i) \cdot a_{kj} \,. \end{aligned}$$

Nun gilt aber $\det A(k,i) = (-1)^{k+i} \det \tilde{A}_{k,i}$, wobei

$$\tilde{A}_{k,i} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,i-1} & 0 & a_{k-1,i+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k1} & \cdots & a_{k,i-1} & 1 & a_{k,i+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,i-1} & 0 & a_{k+1,i+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

Beweis II

denn durch $(k-1)$ Zeilenvertauschungen und $(i-1)$ Spaltenvertauschungen kann man $\tilde{A}_{ki}$ auf die Form $\left[\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & A(k,i) \end{array}\right]$ bringen und dafür gilt

$$\begin{aligned} \det \tilde{A}_{k,i} &= (-1)^{i-1+k-1} \det \left[\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & A(k,i) \end{array}\right] \\ &= (-1)^{i+k} \det A(k,i). \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \det A(k,i) a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} (-1)^{i+k} \det \tilde{A}_{k,i} a_{kj} \end{aligned}$$

Beweis III

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \det \begin{bmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & 0 & & & \\
a_{k1} & \cdots & a_{k,i-1} & a_{kj} & a_{k,i+1} & \cdots & a_{kn} \\
 & & & 0 & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix} \\
&= \det \left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1j} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{nj} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right] \\
&= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \det A, & i = j \end{cases} \\
&= \delta_{ij} \cdot \det A
\end{aligned}
$$

Der Beweis für die andere Aussage $A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \det A \cdot I$ ist analog.