Die Determinante

Lineare Algebra I

Kapitel 7

29. Mai 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/~holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004 (ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Determinante und Invertierbarkeit

Theorem

Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$.

In diesem Fall gilt

(a) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj}(A)$.

(b) Für $n \geq 2$ gilt $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i,j)$ (Laplace-Entwicklung der Determinante nach der i-ten Zeile),

(c) Für $n \geq 2$ gilt $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i,j)$ (Laplace-Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte).

Determinante und Invertierbarkeit: Beweis

(a) Klar aus dem Hauptsatz über die Adjungte, denn falls $\frac{1}{\det A}$ existiert, so existiert

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj}(A).$$

Determinante und Invertierbarkeit: Beweis

(a) Klar aus dem Hauptsatz über die Adjungte, denn falls $\frac{1}{\det A}$ existiert, so existiert

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj}(A).$$

(b) Folgt aus $A \cdot \operatorname{Adj} A = \det A \cdot I$.

Determinante und Invertierbarkeit: Beweis

(a) Klar aus dem Hauptsatz über die Adjungte, denn falls $\frac{1}{\det A}$ existiert, so existiert

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj}(A).$$

(b) Folgt aus $A \cdot \operatorname{Adj} A = \det A \cdot I$.

(c) Für beliebiges j gilt nach dem Hauptsatz über die Adjugte, dass

$$\det A \cdot \delta_{jj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \det A(k,j) a_{k,j}\,.$$

(Laplace-Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte).

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} &= 1 \cdot (+1) \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \quad & \quad +2 \cdot (-1) \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \\
& \quad +3 \cdot (+1) \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\
&= (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) \\
&= -3 + 12 - 9 = 0.
\end{aligned}
$$

Also ist die Matrix nicht invertierbar.

Cramer'sche Regel

(Diese ist nur von theoretischem Wert, man sollte sie nie auf dem Rechner verwenden für große n.)

Cramer'sche Regel

(Diese ist nur von theoretischem Wert, man sollte sie nie auf dem Rechner verwenden für große n.)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, $b \in \mathbb{K}^{n,1}$ und $\mathrm{Rang} A = \mathrm{Rang}[A, b] = n$. Dann ist die Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = b$$

gegeben durch $x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj}(A) \cdot b$ also

$$x_i = \frac{\det[a_1, \cdots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \cdots, a_n]}{\det A}, \qquad i = 1, \cdots, n\,.$$

Cramer'sche Regel

(Diese ist nur von theoretischem Wert, man sollte sie nie auf dem Rechner verwenden für große n.)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, $b \in \mathbb{K}^{n,1}$ und $\mathrm{Rang} A = \mathrm{Rang}[A, b] = n$. Dann ist die Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = b$$

gegeben durch $x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj}(A) \cdot b$ also

$$x_i = \frac{\det[a_1, \cdots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \cdots, a_n]}{\det A}, \qquad i = 1, \cdots, n\,.$$

Man muss also, um x zu berechnen, $n+1$ Determinanten berechnen. Das geht viel billiger mit dem Gauß'schen Algorithmus.

Cramer'sche Regel

(Diese ist nur von theoretischem Wert, man sollte sie nie auf dem Rechner verwenden für große n.)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{n,n}, b \in \mathbb{K}^{n,1}$ und $\mathrm{Rang} A = \mathrm{Rang}[A, b] = n$. Dann ist die Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = b$$

gegeben durch $x = A^{-1} b = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj}(A) \cdot b$ also

$$x_i = \frac{\det[a_1, \cdots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \cdots, a_n]}{\det A}, \qquad i = 1, \cdots, n\,.$$

Man muss also, um x zu berechnen, $n+1$ Determinanten berechnen. Das geht viel billiger mit dem Gauß'schen Algorithmus.

(Man berechnet übrigens in der Praxis Determinanten auch mit dem Gauß'schen Algorithmus.)

Cramer'sche Regel : Beispiel

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow &= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= (8 - 2 - 2) - (4 + 1 - 2 - 1) = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow &= 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \cdot (4 + 1 - 2 - 1) - (4 - 1) = 1, \end{aligned}$$

Cramer'sche Regel : Beispiel

$$
\begin{aligned}
\det \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} &= 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= 2 \cdot (4 - 2 - 2) - (2 - 2 - 1) = 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} &= 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 2 \cdot (4 + 1 - 1 - 2) - (2 + 1 - 1) = 2,
\end{aligned}
$$

Cramer'sche Regel : Beispiel

$$
\begin{aligned}
\det A &= 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \\
&= 2 \cdot (8 - 2 - 2) - 3 = 5,
\end{aligned}
$$

$$
x = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \qquad \text{Probe:} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{5} \\ \frac{5}{5} \\ \frac{5}{5} \\ \frac{5}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Beispiel: Gauß

Mit Gauß erhalten wir:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Rückwärts einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} x_4 &= \tfrac{2}{5}, \\ x_3 &= \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{5}\right) = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{15} = \tfrac{1}{5}, \\ x_2 &= \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5}\right) = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{10} = \tfrac{1}{5}, \\ x_1 &= \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{5}\right) = \tfrac{2}{5}. \end{aligned}$$