# Das characteristische Polynom und der Satz von Cayley-Hamilton

Lineare Algebra I

Kapitel 8

4. Juni 2013

# Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/~holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

# Das characteristische Polynom

**Definition**

Sei $A \in R^{n,n}$, $R$ ein kommutativer Ring mit Eins-Element. Dann heißt das Polynom

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

das charakteristische Polynom von $A$.

# Das characteristische Polynom

Definition

Sei $A \in R^{n,n}$, $R$ ein kommutativer Ring mit Eins-Element. Dann heißt das Polynom

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

das charakteristische Polynom von $A$.

Warum ist das überhaupt ein Polynom?

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} (\lambda \delta_{j,\sigma(j)} - a_{j,\sigma(j)})$$

ist eine Summe von Produkten von Termen der Form $(\lambda \delta_{j,\sigma(j)} - a_{j,\sigma(j)})$ und damit ein Polynom.

# Form des characteristischen Polynoms

Einer dieser Terme hat die Form $\prod_{j=1}^{n}(\lambda - a_{jj})$, deswegen ist dies ein Polynom vom Grad $n$. Somit kann man $P_A(\lambda)$ schreiben als

$$P_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - a_{jj}) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq 12\cdots n}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n}\left(\lambda\delta_{j,\sigma(j)} - a_{j,\sigma(j)}\right).$$

# Form des characteristischen Polynoms

Einer dieser Terme hat die Form $\prod_{j=1}^{n}(\lambda - a_{jj})$, deswegen ist dies ein Polynom vom Grad $n$. Somit kann man $P_A(\lambda)$ schreiben als

$$P_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - a_{jj}) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq 12\cdots n}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n}(\lambda\delta_{j,\sigma(j)} - a_{j,\sigma(j)})\,.$$

In jedem Term des zweiten Summanden gibt es mindestens zwei Faktoren, die kein $\lambda$ enthalten. Damit ist der Grad des zweiten Summanden höchstens $n-2$. Es folgt

$$P_A(\lambda) = \lambda^n - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jj}\right)\lambda^{n-1} + q(\lambda)$$

mit $q(\lambda)$ vom Grad $\leq n-2$.

# Form des characteristischen Polynoms II

## Definition: Spur

Sei $A \in R^{n,n}$, $R$ ein kommutativer Ring mit Eins-Element. Dann heißt die Summe

$$\mathrm{tr}(A) = \mathsf{Spur}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$$

die Spur der Matrix $A$. (Englisch: *trace*).

Damit folgt

$$P_A(\lambda) = \lambda^n - \mathrm{tr}(A)\lambda^{n-1} + q(\lambda) \qquad \text{mit } \mathrm{Grad}(q) \leq n-2.$$

# Form des characteristischen Polynoms II

## Definition: Spur

Sei $A \in R^{n,n}$, $R$ ein kommutativer Ring mit Eins-Element. Dann heißt die Summe

$$\mathrm{tr}(A) = \mathsf{Spur}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$$

die Spur der Matrix $A$. (Englisch: *trace*).

Damit folgt

$$P_A(\lambda) = \lambda^n - \mathrm{tr}(A)\lambda^{n-1} + q(\lambda) \qquad \text{mit } \mathrm{Grad}(q) \leq n-2.$$

Man hat also zu jeder Matrix ein Polynom. Umgekehrt kann man auch zu jedem Polynom vom Grad $n$ mit führendem Term $\lambda^n$ eine Matrix konstruieren, die dieses als charakteristisches Polynom hat.

# Begleitmatrix

**Lemma**

Sei $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$, so ist $p(\lambda)$ charakteristisches Polynom von

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_n \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_2 \\ & & & 1 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

# Begleitmatrix

**Lemma**

Sei $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$, so ist $p(\lambda)$ charakteristisches Polynom von

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_n \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_2 \\ & & & 1 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

**Definition**

Die zu einem Polynom $p(\lambda)$ konstruierte Matrix aus diesem Lemma heißt Begleitmatrix zu $p(\lambda)$.