# Eigenwerte und Eigenvektoren

Lineare Algebra I

Kapitel 8

12. Juni 2013

## Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/~holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

# Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Falls $u \in \mathbb{K}^{n,1}$, $u \neq 0$, und $\lambda \in \mathbb{K}$ die Gleichung

$$Au = \lambda u$$

erfüllen, so heißt $u$ Eigenvektor von $A$ zum zugehörigen Eigenwert $\lambda$.

# Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Falls $u \in \mathbb{K}^{n,1}$, $u \neq 0$, und $\lambda \in \mathbb{K}$ die Gleichung

$$Au = \lambda u$$

erfüllen, so heißt $u$ Eigenvektor von $A$ zum zugehörigen Eigenwert $\lambda$.

Da Eigenvektoren immer ungleich 0 sind, folgt aus $\lambda_1 u = \lambda_2 u$, dass $\lambda_1 = \lambda_2$. Der Eigenwert zu $u$ ist also eindeutig.

# Eigenwerte und Eigenvektoren

## Definition

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Falls $u \in \mathbb{K}^{n,1}$, $u \neq 0$, und $\lambda \in \mathbb{K}$ die Gleichung

$$Au = \lambda u$$

erfüllen, so heißt $u$ Eigenvektor von $A$ zum zugehörigen Eigenwert $\lambda$.

Da Eigenvektoren immer ungleich 0 sind, folgt aus $\lambda_1 u = \lambda_2 u$, dass $\lambda_1 = \lambda_2$. Der Eigenwert zu $u$ ist also eindeutig.

## Theorem

Zu $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ gibt es einen Eigenvektor $u$ mit Eigenwert $\lambda$ genau dann, wenn $\lambda$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda)$ ist.

# Eigenwerte und das characteristische Polynom

**Theorem**

Zu $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ gibt es einen Eigenvektor $u$ mit Eigenwert $\lambda$ genau dann, wenn $\lambda$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda)$ ist.

# Eigenwerte und das characteristische Polynom

**Theorem**

Zu $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ gibt es einen Eigenvektor $u$ mit Eigenwert $\lambda$ genau dann, wenn $\lambda$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda)$ ist.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \det(\lambda I - A) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{das homogene Gleichungssystem } (\lambda I - A)u = 0 \\ &\qquad\quad \text{hat mindestens eine nichttriviale Lösung,} \\ &\qquad\quad \text{d.h. eine Lösung ungleich } 0. \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, u \in \mathbb{K}^{n,1}, u \neq 0 \text{ mit } \lambda u = Au. \end{aligned}$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren: Beispiel

Eigenwerte und Eigenvektoren von $A \in \mathbb{K}^{2,2}$

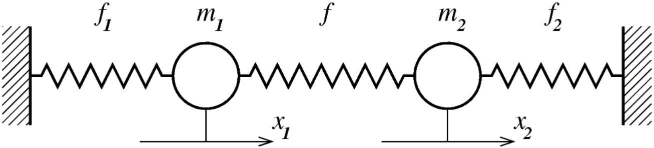
$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\mathrm{Spur}(A)} \lambda + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{\det(A)} = 0\end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{Spur}(A)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Spur}(A)^2 - 4\det(A)}$$

Eigenvektoren erhält man als Lösung von

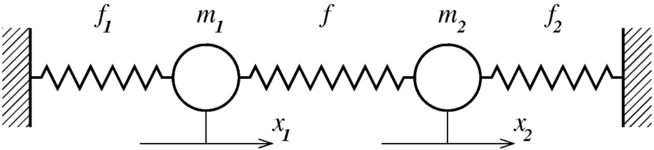
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= 0, \\ \begin{bmatrix} \lambda_2 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda_2 - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= 0.\end{aligned}$$

# Eigenwerte in der Technik




$f_1, f, f_2$ - Federkonstanten

# Eigenwerte in der Technik




$f_1, f, f_2$ - Federkonstanten

Bewegungsgleichungen im Gleichgewicht:

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -f_1 x_1 + f(x_2 - x_1) \\
m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -f_2 x_2 - f(x_2 - x_1)
\end{aligned}
$$

# Eigenwerte in der Technik II

Führe Geschwindigkeiten $v_1 = \frac{dx_1}{dt}$, $v_2 = \frac{dx_2}{dt}$ ein. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{m_1}\left(-f_1 x_1 + f(x_2 - x_1)\right) = -\frac{f_1 + f}{m_1} x_1 + \frac{f}{m_1} x_2, \\
\frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{m_2}\left(-f_2 x_2 - f(x_2 - x_1)\right) = \frac{f}{m_2} x_1 - \frac{f + f_2}{m_2} x_2 \,, \\
\frac{dx_1}{dt} &= v_1 \,, \\
\frac{dx_2}{dt} &= v_2 \,.
\end{aligned}
$$

# Eigenwerte in der Technik II

Führe Geschwindigkeiten $v_1 = \frac{dx_1}{dt}$, $v_2 = \frac{dx_2}{dt}$ ein. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{m_1}\left(-f_1 x_1 + f(x_2 - x_1)\right) = -\frac{f_1 + f}{m_1} x_1 + \frac{f}{m_1} x_2 , \\
\frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{m_2}\left(-f_2 x_2 - f(x_2 - x_1)\right) = \frac{f}{m_2} x_1 - \frac{f + f_2}{m_2} x_2 , \\
\frac{dx_1}{dt} &= v_1 , \\
\frac{dx_2}{dt} &= v_2 .
\end{aligned}
$$

$$
y := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = Ay = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{f_1+f}{m_1} & \frac{f}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{f}{m_2} & -\frac{f+f_2}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} y .
$$

# Eigenwerte in der Technik III

Ansatz: $y = e^{\lambda t} z$ wobei $z \in \mathbb{C}^4$.

$$
\begin{array}{rll}
\frac{dy}{dt} = & \lambda e^{\lambda t} z = A e^{\lambda t} z & \Big| \cdot e^{-\lambda t} \\
\Longrightarrow & \lambda z = Az & \\
\Longrightarrow & (\lambda I - A) z = 0 & \\
\Longrightarrow & \lambda \text{ ist Eigenwert und } z \text{ Eigenvektor.} &
\end{array}
$$

Die Eigenwerte $\lambda$ sind die Eigenfrequenzen des Systems.

# Eigenwerte in der Technik III

Ansatz: $y = e^{\lambda t} z$ wobei $z \in \mathbb{C}^4$.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} = \quad & \lambda e^{\lambda t} z = A e^{\lambda t} z \qquad \Big| \cdot e^{-\lambda t} \\
\Longrightarrow \quad & \lambda z = Az \\
\Longrightarrow \quad & (\lambda I - A) z = 0 \\
\Longrightarrow \quad & \lambda \text{ ist Eigenwert und } z \text{ Eigenvektor.}
\end{aligned}
$$

Die Eigenwerte $\lambda$ sind die Eigenfrequenzen des Systems.

Konkret wählen wir $f_1 = f_2 = f = 1$, $m_1 = m_2 = 1$ und erhalten:

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

# Eigenwerte in der Technik IV

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\
&= \lambda \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 0 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda \end{bmatrix} \\
&= \lambda(\lambda^3 + 2\lambda) - (-4 + 1 - 2\lambda^2) \\
&= \lambda^4 + 4\lambda^2 + 3 = \omega^2 + 4\omega + 3 \qquad \text{mit } \ \omega = \lambda^2
\end{aligned}
$$

$$\omega = \tfrac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \tfrac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = -2 \pm 1\,,$$

$$\omega_1 = -1,\ \omega_2 = -3\,,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i,\ \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3}i\,.$$