# Vektorräume

Lineare Algebra I

Kapitel 9

18. Juni 2013

## Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/˜holtz   Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097   Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

# Vektorräume

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein Tripel $(V, +, \cdot)_{\mathbb{K}}$, bestehend aus einer Menge $V$, einer Abbildung $+$ (Addition) und einer Abbildung $\cdot$ (skalare Multiplikation), wobei

$$+ : \begin{array}{l} V \times V \longrightarrow V \\ (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} + \vec{y} \end{array}, \qquad \cdot : \begin{array}{l} \mathbb{K} \times V \longrightarrow V \\ (\lambda, \vec{x}) \mapsto \lambda \cdot \vec{x} \end{array},$$

heißt $\mathbb{K}$-Vektorraum, falls folgende Axiome erfüllt sind.

(i) für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ : $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
( Assoziativität $+$ in $V$)

(ii) für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ : $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
( Kommutativität $+$ in $V$)

(iii) Es gibt $\vec{0} \in V$ : für alle $\vec{x} \in V$ : $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x} = \vec{x} + \vec{0}$
( Null in $V$)

(iv) für alle $\vec{x} \in V$ gibt es $\vec{y} \in V$ : $\vec{y} + \vec{x} = \vec{0}$
( Additive Inverse in $V$)

# Vektorräume: Definition

(v) für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, \vec{x} \in V$ : $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{x}$

( Assoziativität der Skal.mult.)

(vi) für alle $\vec{x} \in V$ : $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

( Eins der Skal.mult.)

(vii) für alle $\lambda \in \mathbb{K}, \vec{x}, \vec{y} \in V$ : $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$

( Distributivität )

(viii) für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, \vec{x} \in V$ : $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$

( Distributivität )

# Vektorräume: Definition

(v) für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, \vec{x} \in V$ : $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{x}$
( Assoziativität der Skal.mult.)

(vi) für alle $\vec{x} \in V$ : $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
( Eins der Skal.mult.)

(vii) für alle $\lambda \in \mathbb{K}, \vec{x}, \vec{y} \in V$ : $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$
( Distributivität )

(viii) für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, \vec{x} \in V$ : $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$
( Distributivität )

**NB:** 1. $V$ muss also eine kommutative Gruppe bezüglich $+$ sein.

2. Die Symbole $+$ und $\cdot$ wurden hier mehrfach verwendet. Je nach Zusammenhang handelt es sich entweder um die Operationen im Körper oder um die neu definierten Operationen. Im folgenden benutzen wir noch die Konvention, dass wir $\lambda\vec{x}$ anstatt $\lambda \cdot \vec{x}$ schreiben.

# Beispiele

a) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , $V = \mathbb{C}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{C}\}$. Hier ist $+$ die komponentenweise Addition und die skalare Multiplikation wirkt auf alle Komponenten gleichzeitig.

b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R}) = \{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig }\}$. Hier ist die Addition die Addition von Abbildungen und die Multiplikation einer Abbildung mit einem Sklalar ist definiert durch die Abbildung $\lambda f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda f(x)$.

c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$ mit der Addition aus $\mathbb{C}$ und der Multiplikation in $\mathbb{R}$.

d) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , $V = \{0\} \subset \mathbb{R}$ mit der Addition aus $\mathbb{R}$ und der Multiplikation in $\mathbb{R}$.

e) $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ , $V = \mathbb{F}_2^n$ mit der Addition aus $\mathbb{F}_2$ und der Multiplikation in $\mathbb{F}_2$.

f) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , $V = \mathbb{R}^{n,m}$ mit der Addition aus $\mathbb{R}^{n,m}$ und der skalaren Multiplikation bei Matrizen.

# Eigenschaften eines Vektorraums

Satz.

(a) In einem Vektorraum gibt es genau ein $\vec{0} \in V$, wobei $\vec{0}$ das neutrale Element der Addition ist.

(b) Das additive Inverse ist eindeutig.

(c) $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}\,, \qquad$ für alle $\vec{v} \in V$.

(d) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}\,, \qquad$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

(e) $(-\lambda)\vec{v} = -\lambda\vec{v} = \lambda(-\vec{v})\,, \qquad$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, und für alle $\vec{v} \in V$.

# Eigenschaften eines Vektorraums

Satz.

(a) In einem Vektorraum gibt es genau ein $\vec{0} \in V$, wobei $\vec{0}$ das neutrale Element der Addition ist.

(b) Das additive Inverse ist eindeutig.

(c) $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}\,, \qquad$ für alle $\vec{v} \in V$.

(d) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}\,, \qquad$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

(e) $(-\lambda)\vec{v} = -\lambda\vec{v} = \lambda(-\vec{v})\,, \qquad$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, und für alle $\vec{v} \in V$.

**Beweis.**

(a) Angenommen, es gibt zwei verschiedene Nullelemente $\vec{0}, \vec{0}'$, so folgt nach Axiomen (ii), (iii)

$$\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}' = \vec{0}' + \vec{0} = \vec{0}'\,.$$

# Beweis, II

(b) Wenn $\vec{a}+\vec{x}=\vec{0}$ und $\vec{b}+\vec{x}=\vec{0}$ gilt, so folgt

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{a}+\vec{0} && \text{(iii)}\\
&= \vec{a}+(\vec{b}+\vec{x}) && \\
&= \vec{a}+(\vec{x}+\vec{b}) && \text{(ii)}\\
&= (\vec{a}+\vec{x})+\vec{b} && \text{(i)}\\
&= \vec{0}+\vec{b} && \\
&= \vec{b} && \text{(iii)}
\end{aligned}$$

# Beweis, II

(b) Wenn $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$ und $\vec{b} + \vec{x} = \vec{0}$ gilt, so folgt

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{a} + \vec{0} && \text{(iii)} \\
&= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{x}) && \\
&= \vec{a} + (\vec{x} + \vec{b}) && \text{(ii)} \\
&= (\vec{a} + \vec{x}) + \vec{b} && \text{(i)} \\
&= \vec{0} + \vec{b} && \\
&= \vec{b} && \text{(iii)}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
0 \cdot \vec{v} &= (0 + 0) \cdot \vec{v} && \\
&= 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v} && \text{(viii)} \\
\vec{0} &= 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v} - 0 \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v}. &&
\end{aligned}$$

# Beweis, II

(b) Wenn $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$ und $\vec{b} + \vec{x} = \vec{0}$ gilt, so folgt

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a} + \vec{0} && \text{(iii)} \\ &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{x}) \\ &= \vec{a} + (\vec{x} + \vec{b}) && \text{(ii)} \\ &= (\vec{a} + \vec{x}) + \vec{b} && \text{(i)} \\ &= \vec{0} + \vec{b} \\ &= \vec{b} && \text{(iii)} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 0 \cdot \vec{v} &= (0 + 0) \cdot \vec{v} \\ &= 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v} && \text{(viii)} \\ \vec{0} &= 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v} - 0 \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

(d)

$$\lambda \cdot \vec{0} \overset{\text{(iii)}}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{\text{(vii)}}{=} \lambda \cdot \vec{0} + \lambda \cdot \vec{0} \qquad \text{also} \qquad \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

(e)

$$\begin{aligned} \lambda\vec{v} + (-\lambda)\vec{v} = (\lambda - \lambda)\vec{v} = \vec{0} \cdot \vec{v} = \vec{0}\,, \\ \lambda\vec{v} + \lambda(-\vec{v}) = \lambda(\vec{v} - \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}\,. \end{aligned}$$

# Untervektorraum

Definition

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subset V$. Dann heißt $U$ Untervektorraum von $V$ (kurz: Unterraum), falls $U$ abgeschlossen bezüglich $+$ und $\cdot$ ist, und falls $U$ selbst wieder ein Vektorraum ist.

# Untervektorraum

**Definition**

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subset V$. Dann heißt $U$ Untervektorraum von $V$ (kurz: Unterraum), falls $U$ abgeschlossen bezüglich $+$ und $\cdot$ ist, und falls $U$ selbst wieder ein Vektorraum ist.

**Beispiele.**

Jeder Vektorraum $V$ hat die “trivialen” Unterräume $U = V$ und $U = \{\vec{0}\}$.

$$
\begin{array}{llll}
\text{a)} & V & = & \mathcal{C}([-1,+1],\mathbb{R})\,, \\
& U & = & \mathcal{C}^1([-1,+1],\mathbb{R}) \\
& & =: & \{f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}) \mid f \text{ differenzierbar in } [-1,1]\}\,.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{b)} & V & = & \mathbb{R}^4\,, \\
& U & = & \mathbb{R}^3 \quad = \{(x,y,z,0) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}\,.
\end{array}
$$

# Untervektorraum-Test

**Theorem**

$U$ ist genau dann ein Unterraum von $V$, wenn $U$ eine nicht leere Teilmenge von $V$ ist, für die gilt:

- $\vec{u} + \vec{v} \in U$ für alle $\vec{u}$, $\vec{v} \in U$.
- $\lambda \vec{u} \in U$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\vec{u} \in U$.

**Beweis:** Übungsaufgabe.

# Untervektorraum-Test

## Theorem

$U$ ist genau dann ein Unterraum von $V$, wenn $U$ eine nicht leere Teilmenge von $V$ ist, für die gilt:

- $\vec{u} + \vec{v} \in U$ für alle $\vec{u}$, $\vec{v} \in U$.
- $\lambda \vec{u} \in U$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\vec{u} \in U$.

**Beweis:** Übungsaufgabe.

## Definition

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ gegeben. Ein Vektor der Form $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \in V$ heißt Linearkombination von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ mit den Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Die lineare Hülle von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ist die Menge

$$\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}.$$