Basen und Dimension

Lineare Algebra I

Kapitel 9

19. Juni 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/~holtz   Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097   Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Lineare (Un)abhängigkeit

Definition. Eine Menge von Vektoren $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ heißt linear unabhängig wenn aus

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{v}_j = \vec{0}$$

folgt, dass alle $\alpha_j = 0$ sind. Sonst heißt $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ linear abhängig.

Lineare (Un)abhängigkeit

Definition. Eine Menge von Vektoren $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ heißt linear unabhängig wenn aus

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{v}_j = \vec{0}$$

folgt, dass alle $\alpha_j = 0$ sind. Sonst heißt $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ linear abhängig.

Bemerkungen. 1. Jede Menge, die den Null-Vektor enthält, ist linear abhängig. 2. Die Leermenge $\emptyset$ ist linear unabhängig.

Lemma. Die Menge $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ ist linear unabhängig genau dann, wenn keines der $\vec{v}_j$, $j = 1, \ldots, n$, Linearkombination der anderen ist.

Lineare (Un)abhängigkeit

Definition. Eine Menge von Vektoren $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ heißt linear unabhängig wenn aus

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{v}_j = \vec{0}$$

folgt, dass alle $\alpha_j = 0$ sind. Sonst heißt $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ linear abhängig.

Bemerkungen. 1. Jede Menge, die den Null-Vektor enthält, ist linear abhängig. 2. Die Leermenge $\emptyset$ ist linear unabhängig.

Lemma. Die Menge $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ ist linear unabhängig genau dann, wenn keines der $\vec{v}_j$, $j = 1, \ldots, n$, Linearkombination der anderen ist.

Beweis. Die Vektoren sind genau dann abhängig, wenn $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{v}_j = \vec{0}$ mit mindestens einem Skalar $\lambda_j \neq 0$ gibt. Letzteres gilt genau dann, wenn

$$v_j = -\sum_{i \neq j} (\lambda_j^{-1} \lambda_i) \vec{v}_i$$

gilt, d.h. wenn $\vec{v}_j$ eine Linearkombination der anderen Vektoren ist.

Basen

Basis: Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Menge $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V$ von Vektoren heißt Basis von V, wenn

a) die Menge $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ linear unabhängig ist,

b) $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = V$.

Lemma

Sei $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ eine Basis von V. Dann gibt es zu jedem $\vec{v} \in V$ genau ein Element

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n,1} \cong \mathbb{K}^n, \qquad \text{so dass}$$

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n \,.$$

Beweis:

Da $V = \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$, so gibt es zu jedem $\vec{v} \in V$ Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ oder

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n,1}, \quad \text{so dass} \quad \vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{v}_j.$$

Es bleibt also nur zu zeigen, dass es genau einen solchen Vektor gibt. Sei $\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n,1}$ ein weiteres Element, so dass $\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \vec{v}_j$. Dann folgt

$$0 \quad = \vec{v} - \vec{v} \quad = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{v}_j - \sum_{j=1}^{n} \mu_j \vec{v}_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \mu_j) \vec{v}_j \ ,$$

und wegen der linearen Unabhängigkeit der $\vec{v}_j$ folgt

$$\lambda_j - \mu_j = 0 \, , \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Basisergänzungssatz

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in V$, $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s \in V$. Wenn $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s) = V$ und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ linear unabhängig sind, dann kann man $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ durch eventuelle Hinzunahme von Vektoren aus $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s\}$ zu einer Basis ergänzen.

Basisergänzungssatz

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in V$, $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s \in V$. Wenn $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s) = V$ und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ linear unabhängig sind, dann kann man $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ durch eventuelle Hinzunahme von Vektoren aus $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s\}$ zu einer Basis ergänzen.

Beweis. Induktion nach s. ($s = 0, r = 0$ sind OK, da $\mathrm{Span}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$.)

I.A.: Falls $s = 0$ ist, so gibt es nichts zu zeigen, da dann schon $v_1, \ldots, v_r$ eine Basis bilden.

Basisergänzungssatz

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in V$, $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s \in V$. Wenn $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s) = V$ und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ linear unabhängig sind, dann kann man $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ durch eventuelle Hinzunahme von Vektoren aus $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s\}$ zu einer Basis ergänzen.

Beweis. Induktion nach s. ($s = 0, r = 0$ sind OK, da $\mathrm{Span}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$.)

I.A.: Falls $s = 0$ ist, so gibt es nichts zu zeigen, da dann schon $v_1, \ldots, v_r$ eine Basis bilden.

I.V.: Sei die Behauptung richtig für $s = k$.

Basisergänzungssatz

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in V$, $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s \in V$. Wenn $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s) = V$ und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ linear unabhängig sind, dann kann man $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ durch eventuelle Hinzunahme von Vektoren aus $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s\}$ zu einer Basis ergänzen.

Beweis. Induktion nach s. ($s = 0, r = 0$ sind OK, da $\mathrm{Span}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$.)

I.A.: Falls $s = 0$ ist, so gibt es nichts zu zeigen, da dann schon $v_1, \ldots, v_r$ eine Basis bilden.

I.V.: Sei die Behauptung richtig für $s = k$.

I.S.: Sei $s = k + 1$. Falls schon $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ eine Basis ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r) \neq V$. Dann gibt es mindestens ein $j \in \{1, \ldots, s\}$, so dass $\vec{w}_j \notin \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$, denn sonst wäre $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r) = \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s) = V$.

Basisergänzungssatz

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r \in V$, $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s \in V$. Wenn $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s) = V$ und $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ linear unabhängig sind, dann kann man $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ durch eventuelle Hinzunahme von Vektoren aus $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s\}$ zu einer Basis ergänzen.

Beweis. Induktion nach s. ($s = 0, r = 0$ sind OK, da $\mathrm{Span}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$.)

I.A.: Falls $s = 0$ ist, so gibt es nichts zu zeigen, da dann schon $v_1, \dots, v_r$ eine Basis bilden.

I.V.: Sei die Behauptung richtig für $s = k$.

I.S.: Sei $s = k + 1$. Falls schon $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ eine Basis ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r) \neq V$. Dann gibt es mindestens ein $j \in \{1, \dots, s\}$, so dass $\vec{w}_j \notin \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$, denn sonst wäre $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r) = \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s) = V$. Dann sind aber $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r, \vec{w}_j$ linear unabhängig, denn aus $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{v}_i + \lambda \vec{w}_j = \vec{0}$ folgt $\lambda = 0$, (sonst wäre $\vec{w}_j \in \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$) und damit $\lambda_1, \dots, \lambda_r = 0$, da $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ linear unabhängig sind. Nach Induktionsvoraussetzung kann man nun $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r, \vec{w}_j$ durch geeignete Hinzunahme von den $s - 1 = k$ Vektoren $\vec{w}_l$, $l = 1, \dots, s$, $l \neq j$, zu einer Basis ergänzen.

Steinitz'scher Austauschsatz

Austauschsatz [Graßmann, Steinitz]

Sind $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ und $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ Basen eines Vektorraumes V über dem Körper $\mathbb{K}$, so gibt es zu jedem $\vec{v}_i$ ein $\vec{w}_j$, so dass aus $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ wieder eine Basis entsteht, wenn man $\vec{v}_i$ durch $\vec{w}_j$ ersetzt.

Steinitz'scher Austauschsatz

Austauschsatz [Graßmann, Steinitz]

Sind $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ und $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ Basen eines Vektorraumes V über dem Körper $\mathbb{K}$, so gibt es zu jedem $\vec{v}_i$ ein $\vec{w}_j$, so dass aus $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ wieder eine Basis entsteht, wenn man $\vec{v}_i$ durch $\vec{w}_j$ ersetzt.

Beweis. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ fest gewählt, dann gibt es ein $j \in \{1, \ldots, m\}$, so dass

$$\vec{w}_j \notin \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)\,,$$

anderenfalls wäre $V = \mathrm{Span}(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m)$ Teilmenge von

$$\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n),$$

und damit echte Teilmenge von $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = V$, welches aber nicht sein kann, da die $\vec{v}_i$ linear unabhängig sind.

Beweis, Teil II

Für dieses j sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{w}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängig, denn aus

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} \lambda_l \vec{v}_l + \mu \vec{w}_j = 0$$

folgt erst einmal $\mu = 0$, da $\vec{w}_j \notin \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)$, und dann natürlich auch $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n = 0$.

Beweis, Teil II

Für dieses j sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{w}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängig, denn aus

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} \lambda_l \vec{v}_l + \mu \vec{w}_j = 0$$

folgt erst einmal $\mu = 0$, da $\vec{w}_j \notin \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)$, und dann natürlich auch $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n = 0$.

Wir fügen nun $\vec{v}_i$ wieder hinzu und erhalten

$$\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}_j) = V.$$

Dann ist nach dem Basisergänzungssatz entweder $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{w}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$ eine Basis oder es wird durch Hinzufügen von $\vec{v}_i$ zu einer Basis. Das letztere ist nicht möglich, denn wir können $\vec{w}_j$ aus $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linear konstruieren. Dann wären aber $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}_j$ linear abhängig. Also bilden

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}_j$$

eine Basis.

Dimension

Folgerung

Jeder aus endlich vielen Vektoren erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis und je zwei Basen desselben Vektorraumes haben gleich viele Elemente.

Beweis. Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$, so dass $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, \vec{v}_n) = V$. Sei $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, so folgt aus dem Basisergänzungssatz, dass es eine Basis gibt.
Angenommen, es gibt zwei Basen $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ und $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ von V und $n \neq m$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n > m$. Dann können wir mit Austauschsatz nacheinander alle Vektoren von $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ durch Vektoren aus $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ austauschen. Dann kommt aber wegen $n > m$ irgendwann ein Vektor doppelt vor und das kann wegen der linearen Unabhängigkeit der Elemente einer Basis nicht sein. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

Dimension

Folgerung

Jeder aus endlich vielen Vektoren erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis und je zwei Basen desselben Vektorraumes haben gleich viele Elemente.

Beweis. Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$, so dass $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, \vec{v}_n) = V$. Sei $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, so folgt aus dem Basisergänzungssatz, dass es eine Basis gibt.
Angenommen, es gibt zwei Basen $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ und $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ von V und $n \neq m$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n > m$. Dann können wir mit Austauschsatz nacheinander alle Vektoren von $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ durch Vektoren aus $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ austauschen. Dann kommt aber wegen $n > m$ irgendwann ein Vektor doppelt vor und das kann wegen der linearen Unabhängigkeit der Elemente einer Basis nicht sein. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

Definition: Dimension

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Die (eindeutig bestimmte) Anzahl der Basiselemente in jeder Basis von V heißt Dimension von V, kurz $\dim V$.