# Koordinaten und Basisübergang

Lineare Algebra I

Kapitel 9

25. Juni 2013

## Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/˜holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

# Basen

## Basis: Definition

Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Menge $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V$ von Vektoren heißt Basis von $V$, wenn

a) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängig sind,

b) $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = V$.

## Lemma

Sei $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ eine Basis von $V$. Dann gibt es zu jedem $\vec{v} \in V$ genau ein Element

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n,1} \cong \mathbb{K}^n, \qquad \text{so dass}$$

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n\,.$$

# Koordinaten

Die Darstellung von $\vec{v}$ bezüglich der Basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ mit den Skalaren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ist somit eindeutig. Man kann also jeden Vektor $\vec{v}$ bezüglich $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ darstellen, die Größen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, die zu $\vec{v}$ gehören, heißen Koordinaten von $\vec{v}$. Man beachte, dass es dabei natürlich auf die Nummerierung der Vektoren ankommt.

# Koordinaten

Die Darstellung von $\vec{v}$ bezüglich der Basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ mit den Skalaren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ist somit eindeutig. Man kann also jeden Vektor $\vec{v}$ bezüglich $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ darstellen, die Größen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, die zu $\vec{v}$ gehören, heißen Koordinaten von $\vec{v}$. Man beachte, dass es dabei natürlich auf die Nummerierung der Vektoren ankommt.

Der Vektor $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$ heißt Koordinatenvektor von $\vec{v}$, oder auch Basisdarstellung von $\vec{v}$. Die wichtigste Basis in $\mathbb{K}^n$ ist die sogenannte kanonische Basis aus den Einheitsvektoren

$$\vec{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i, \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

# Beispiel, Teil I

Sei $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{K} = \mathbb{R}$, sei $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} \in V$.

So hat $\vec{v}$ eine Basisdarstellung in der kanonischen Basis:

$$\vec{v} = 1\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \ldots + n\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{n} j\vec{e}_j = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}.$$

Der Koordinatenvektor ist dann $\vec{v}$ selbst.

# Beispiel, Teil II

Wähle nun ein anderes System (andere Menge),

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{v}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

# Beispiel, Teil II

Wähle nun ein anderes System (andere Menge),

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{v}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir zeigen zuerst, dass es eine Basis ist. Für die Matrix

$$A := [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

gilt $\det A = 1$ und damit ist $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ eine Basis.

# Beispiel, Teil III

Wir suchen nun einen Vektor $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$, so dass $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{v}_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$ oder

$$A \cdot \lambda := \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}.$$

Rückwärtseinsetzen ergibt

$$\left.\begin{array}{lllll} \lambda_n & = & n & & \\ \lambda_{n-1} & = & (n-1) - \lambda_n & = & -1 \\ \lambda_{n-2} & = & (n-2) - \lambda_{n-1} & = & n-1 \\ \lambda_{n-3} & = & (n-3) - \lambda_{n-2} & = & -2 \\ \lambda_{n-4} & = & (n-4) - \lambda_{n-3} & = & n-2 \\ \vdots & & & & \\ \lambda_1 & = & 1 - \lambda_2 & = & \ldots \end{array}\right\} \quad \begin{array}{lll} \lambda_{n-2k} & = & n-k, \\ \lambda_{n-(2k-1)} & = & -k \end{array}$$

# Koordinatenformalismus

Im allgemeinen: In einem beliebigen $\mathbb{K}$-Vektorraum nehmen wir eine Basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ und definieren wir die Abbildung

$$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} := \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n.$$

Das ist eine Art "Multiplikation" $V^n \times K^{n,1} \to V$.

# Koordinatenformalismus

Im allgemeinen: In einem beliebigen $\mathbb{K}$-Vektorraum nehmen wir eine Basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ und definieren wir die Abbildung

$$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} := \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n.$$

Das ist eine Art "Multiplikation" $V^n \times K^{n,1} \to V$.

Noch allgemeiner: Sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n,m}$ und sei

$$\vec{u}_j = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Dann schreiben wir die $m$ Linearkombinationen für $\vec{u}_1$, ..., $\vec{u}_m$ als System

$$(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m) = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) A.$$

# Eigenschaften des Koordinatenformalismus

## Lemma

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängig. Sei $A \in \mathbb{K}^{n,m}$ und sei $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m) = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)A$. Dann gilt: die Vektoren $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\mathrm{Rang}(A) = m$ ist.

**Beweis:** Übungsaufgabe.

# Eigenschaften des Koordinatenformalismus

**Lemma**

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängig. Sei $A \in \mathbb{K}^{n,m}$ und sei $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m) = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)A$. Dann gilt: die Vektoren $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\mathrm{Rang}(A) = m$ ist.

**Beweis:** Übungsaufgabe.

**Lemma**

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$, $A \in \mathbb{K}^{n,m}$, $B \in \mathbb{K}^{m,l}$. Dann gilt $((\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)A)B = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)(AB)$.

**Beweis:** Übungsaufgabe.

**Lemma**

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ linear unabhängig und $A \in \mathbb{K}^{n,m}$. Dann $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)A = (\vec{0}, \ldots, \vec{0})$ genau dann, wenn $A = 0$.

**Beweis:** Übungsaufgabe.

# Basisübergang

Seien $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ zwei Basen von $V$. Für jeden Basisvektor $\vec{v}_j$ gibt es eindeutig bestimmte Koordinaten $p_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, n$, so dass

$$\vec{v}_j = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n) \begin{bmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Das heißt

$$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)P, \quad \textit{wobei} \quad P := [p_{ij}]$$

Ebenso gibt es eine Matrix $Q$

$$(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n) = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)Q.$$

Dann gilt $(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n) = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)Q = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)PQ$, d.h.

$$(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)(I - PQ) = (\vec{0}, \ldots, \vec{0}).$$

# Basisübergangsmatrix

Nach unserem Lemma gilt dann $I - PQ = 0$ (analog auch $I - QP = 0$) und $Q = P^{-1}$. Zudem folgt für einen beliebigen Vektor $\vec{v}$

$$\vec{v} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) \left( P \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \right).$$

D.h. die Koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ kann man aus den Koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ nach der Multiplikation mit $P$ bekommen. Man nennt $P$ deswegen Basisübergangsmatrix:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \qquad Q = P^{-1}.$$