Beziehungen zwischen Vektorräumen und ihren Dimensionen

Lineare Algebra I

Kapitel 9

26. Juni 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/~holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Unterräume, Summe, Durchschnitt

Lemma

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gilt $\dim(U) \leq \dim(V)$, mit Gleichheit genau dann, wenn $U = V$ ist.

Unterräume, Summe, Durchschnitt

Lemma

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gilt $\dim(U) \leq \dim(V)$, mit Gleichheit genau dann, wenn $U = V$ ist.

Beweis: Ist $U \subseteq V$ und ist $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ eine Basis von U, so können wir nach dem Ergänzungssatz diese Menge zu einer Basis von V ergänzen. Sollte U eine echte Teilmenge von U sein, so kommt mindestens ein Basisvektor dazu und gilt $\dim(U) < \dim(V)$. Sonst gilt $U = V$ und $\dim(U) = \dim(V)$.

Unterräume, Summe, Durchschnitt

Lemma

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gilt $\dim(U) \leq \dim(V)$, mit Gleichheit genau dann, wenn $U = V$ ist.

Beweis: Ist $U \subseteq V$ und ist $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ eine Basis von U, so können wir nach dem Ergänzungssatz diese Menge zu einer Basis von V ergänzen. Sollte U eine echte Teilmenge von U sein, so kommt mindestens ein Basisvektor dazu und gilt $\dim(U) < \dim(V)$. Sonst gilt $U = V$ und $\dim(U) = \dim(V)$.

Definition

Seien U_1, U_2 zwei Unterräume von V. Dann definieren wir

a) $U_1 \cap U_2 := \{\vec{u} \mid \vec{u} \in U_1 \text{ und } \vec{u} \in U_2\}$, den Durschnitt von U_1 und U_2

b) $U_1 + U_2 := \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mid \vec{u}_1 \in U_1 \text{ und } \vec{u}_2 \in U_2\}$, die Summe von U_1 und U_2

Eigenschaften von Summen und Durchschnitten

Lemma

Seien U_1 und U_2 zwei Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, so gelten folgende Aussagen:

(1) $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ sind Unterräume von V.

(2) $U_1 + U_1 = U_1$.

(3) $U_1 + \{\vec{0}\} = U_1$.

(2) $U_1 \subseteq U_1 + U_2$, mit Gleichheit genau dann, wenn $U_2 \subseteq U_1$.

Eigenschaften von Summen und Durchschnitten

Lemma

Seien U_1 und U_2 zwei Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, so gelten folgende Aussagen:

(1) $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ sind Unterräume von V.

(2) $U_1 + U_1 = U_1$.

(3) $U_1 + \{\vec{0}\} = U_1$.

(2) $U_1 \subseteq U_1 + U_2$, mit Gleichheit genau dann, wenn $U_2 \subseteq U_1$.

Beweis: (1), (2), (3) sind Übungsaufgabe. Wir beweisen (4).

Eigenschaften von Summen und Durchschnitten

Lemma

Seien U_1 und U_2 zwei Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, so gelten folgende Aussagen:

(1) $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ sind Unterräume von V.

(2) $U_1 + U_1 = U_1$.

(3) $U_1 + \{\vec{0}\} = U_1$.

(2) $U_1 \subseteq U_1 + U_2$, mit Gleichheit genau dann, wenn $U_2 \subseteq U_1$.

Beweis: (1), (2), (3) sind Übungsaufgabe. Wir beweisen (4). Für einen beliebigen Vektor $\vec{u} \in U_1$ gilt: $\vec{u} = \vec{u} + \vec{0}$. Da U_2 ein Unterraum von V ist, ist der Nullvektor in U_2 und ist die Summe $\vec{u} + \vec{0}$ deswegen in $U_1 + U_2$ nach der Definition. D.h., $U_1 \subseteq U_1 + U_2$.

Eigenschaften von Summen und Durchschnitten

Lemma

Seien U_1 und U_2 zwei Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, so gelten folgende Aussagen:

(1) $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ sind Unterräume von V.

(2) $U_1 + U_1 = U_1$.

(3) $U_1 + \{\vec{0}\} = U_1$.

(2) $U_1 \subseteq U_1 + U_2$, mit Gleichheit genau dann, wenn $U_2 \subseteq U_1$.

Beweis: (1), (2), (3) sind Übungsaufgabe. Wir beweisen (4). Für einen beliebigen Vektor $\vec{u} \in U_1$ gilt: $\vec{u} = \vec{u} + \vec{0}$. Da U_2 ein Unterraum von V ist, ist der Nullvektor in U_2 und ist die Summe $\vec{u} + \vec{0}$ deswegen in $U_1 + U_2$ nach der Definition. D.h., $U_1 \subseteq U_1 + U_2$.

Wenn $U_1 + U_2 = U_1$, hat ein beliebiger Vektor $\vec{u} \in U_2$ auch die Form $\vec{0} + \vec{u} \in U_1 + U_2 = U_1$, d.h. $U_2 \subseteq U_1$.

Dimensionsformel für Unterräume

Hauptsatz: Dimensionsformel.

Sind U_1 und U_2 zwei endlichdimensionale Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, so gilt

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2).$$

Dimensionsformel für Unterräume

Hauptsatz: Dimensionsformel.

Sind U_1 und U_2 zwei endlichdimensionale Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, so gilt

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2).$$

Beweis: Sei $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$. Wie ergänzen diese zu einer Basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_l\}$ von U_1 sowie zu einer Basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ von U_2. Es reicht zu zeigen, dass $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_l, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ eine Basis von $U_1 + U_2$ ist.

Dimensionsformel für Unterräume

Hauptsatz: Dimensionsformel.

Sind U_1 und U_2 zwei endlichdimensionale Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, so gilt

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2).$$

Beweis: Sei $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$. Wie ergänzen diese zu einer Basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_l\}$ von U_1 sowie zu einer Basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ von U_2. Es reicht zu zeigen, dass $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_l, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ eine Basis von $U_1 + U_2$ ist. Offensichtlich gilt

$$\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_l, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k) = U_1 + U_2,$$

also ist nur noch zu zeigen, dass die Menge $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_l, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ linear unabhängig ist.

Dimensionsformel für Unterräume: Beweis

Sei $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \vec{w}_i + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \vec{x}_i = \vec{0}$, dann gilt

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \vec{w}_i = -\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \vec{x}_i.$$

Dimensionsformel für Unterräume: Beweis

Sei $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \vec{w}_i + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \vec{x}_i = \vec{0}$, dann gilt

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \vec{w}_i = -\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \vec{x}_i .$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist ein Vektor in U_1, die rechte Seite ein Vektor in U_2. Somit gilt $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \vec{x}_i \in U_1 \cap U_2$.

Nach Konstruktion ist jedoch $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und die Vektoren $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ sind linear unabhängig. Daher müssen alle γ_i, $i = 1, \ldots, k$, gleich Null sein, und $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \vec{x}_i = \vec{0}$ sein.

Dimensionsformel für Unterräume: Beweis

Sei $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \vec{w}_i + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \vec{x}_i = \vec{0}$, dann gilt

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \vec{w}_i = -\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \vec{x}_i.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist ein Vektor in U_1, die rechte Seite ein Vektor in U_2. Somit gilt $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \vec{x}_i \in U_1 \cap U_2$.

Nach Konstruktion ist jedoch $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und die Vektoren $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ sind linear unabhängig. Daher müssen alle γ_i, $i = 1, \ldots, k$, gleich Null sein, und $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \vec{x}_i = \vec{0}$ sein.

Aber dann gilt auch $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \vec{w}_i = \vec{0}$ und somit auch $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_1 = \cdots = \mu_l = 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_l\}$.

Beispiel

Für die beiden Unterräume

$$U_1 = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{K}\}, \qquad U_2 = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{K}\}$$

von $\mathbb{K}^{3,1}$ gilt $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 2$.

Beispiel

Für die beiden Unterräume

$$U_1 = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{K} \}, \qquad U_2 = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{K} \}$$

von $\mathbb{K}^{3,1}$ gilt $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 2$.

Ihr Durschnitt ist der Unterraum

$$U_1 \cap U_2 = \{ \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{K} \}$$

von Dimension 1, und ihre Summe ist der ganze Raum $\mathbb{K}^{3,1}$ von Dimension 3.