Lineare Abbildungen

Lineare Algebra I

Kapitel 10

2. Juli 2013

Lineare Abbildungen

Lineare Algebra I

Kapitel 10

2. Juli 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/~holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Lineare Abbildungen

Definition

Seien V, W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt K-linear (kurz: linear), wenn für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda \in K$ die Gleichungen

(1) $f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$,

(2) $f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$,

gelten. Die Menge aller dieser Abbildungen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(V, W)$.

Lineare Abbildungen

Definition

Seien V, W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt K-linear (kurz: linear), wenn für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda \in K$ die Gleichungen

(1) $f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$,

(2) $f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$,

gelten. Die Menge aller dieser Abbildungen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(V, W)$.

Zur Erinnerung: Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ wird auch lineare Transformation oder (Vektorraum-) Homomorphismus genannt. Eine bijektive lineare Abbildung nennt man Isomorphismus. Gibt es für zwei K-Vektorräume V und W einen Isomorphismus $f \in \mathcal{L}(V, W)$, so nennt man die Räume V und W isomorph, geschrieben

$$V \cong W.$$

Beispiele

Multiplikation mit Matrizen $A \in K^{n,m}$

Jede Matrix definiert durch die Multiplikation eine lineare Abbildung von $K^{m,1}$ nach $K^{n,1}$:

$$A : K^{m,1} \to K^{n,1}, \quad x \mapsto Ax.$$

Diese Abbildung ist linear, denn für die skalare Multiplikation und Addition in der Menge $K^{n,m}$ gelten:

$$\begin{aligned} A(\lambda x) &= \lambda Ax, \quad \text{für alle } x \in K^{m,1} \text{ und } \lambda \in K, \\ A(x+y) &= Ax + Ay, \quad \text{für alle } x, y \in K^{m,1}. \end{aligned}$$

Beispiele

Multiplikation mit Matrizen $A \in K^{n,m}$

Jede Matrix definiert durch die Multiplikation eine lineare Abbildung von $K^{m,1}$ nach $K^{n,1}$:

$$A : K^{m,1} \to K^{n,1}, \quad x \mapsto Ax.$$

Diese Abbildung ist linear, denn für die skalare Multiplikation und Addition in der Menge $K^{n,m}$ gelten:

$$\begin{aligned} A(\lambda x) &= \lambda A x, \quad \text{für alle } x \in K^{m,1} \text{ und } \lambda \in K, \\ A(x+y) &= Ax + Ay, \quad \text{für alle } x, y \in K^{m,1}. \end{aligned}$$

Alle linearen Abbildungen zwischen zwei K-Vektorräumen

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Für $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ und $\lambda \in K$ seien eine Addition und eine skalare Multiplikation definiert durch

$$\begin{aligned} + &: (f+g)(\vec{v}) := f(\vec{v}) + g(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V \\ \cdot &: (\lambda \cdot f)(\vec{v}) := \lambda f(\vec{v}) \qquad \forall \vec{v} \in V. \end{aligned}$$

$(\mathcal{L}(V, W), +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum.

Weitere Beispiele

Polynomenräume

Betrachte die Vektorräume $Q[t]_{\leq 3}$ und $Q[t]_{\leq 2}$ der Polynome vom Grad kleiner gleich 3 bzw. 2 in t über $\mathbb{Q}$. Dann ist die Abbildung

$$f : Q[t]_{\leq 3} \to Q[t]_{\leq 2}, \quad a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \mapsto 2a_2 t^2 + 3a_1 t + 4a_0$$

offensichtlich linear, die Abbildung

$$g : Q[t]_{\leq 3} \to Q[t]_{\leq 2}, \; a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \mapsto a_2 t^2 + a_1 t + a_0^2$$

jedoch nicht, denn z.B. für die Polynome $p_1 = 0t^3 + 0t^2 + t + 2$ und $p_2 = 0t^3 + 0t^2 + t + 1$ ergibt sich $g(p_1 + p_2) = 2t + 9$ aber $g(p_1) + g(p_2) = 2t + 5$.

Festlegung der Bilder der Basisvektoren

Satz

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Ist $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ eine Basis von V und sind $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m \in W$, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, W)$ mit $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ für $i = 1, \ldots, m$.

Festlegung der Bilder der Basisvektoren

Satz

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Ist $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ eine Basis von V und sind $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m \in W$, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, W)$ mit $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ für $i = 1, \ldots, m$.

D.h., dass es immer eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, die durch Wahl einer Basis von V und Festlegung der Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt ist.

Festlegung der Bilder der Basisvektoren

Satz

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Ist $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ eine Basis von V und sind $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m \in W$, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, W)$ mit $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ für $i = 1, \ldots, m$.

D.h., dass es immer eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, die durch Wahl einer Basis von V und Festlegung der Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt ist.

Beweis. Für jedes $\vec{v} \in V$ gibt es eindeutig bestimmte Koordinaten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit $\vec{v} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i$. Wir definieren $f : V \to W$ durch $f(\vec{v}) := \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{w}_i$. Es gilt dann $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ für $i = 1, \ldots, m$.

Festlegung der Bilder der Basisvektoren

Satz

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Ist $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ eine Basis von V und sind $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m \in W$, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, W)$ mit $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ für $i = 1, \ldots, m$.

D.h., dass es immer eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, die durch Wahl einer Basis von V und Festlegung der Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt ist.

Beweis. Für jedes $\vec{v} \in V$ gibt es eindeutig bestimmte Koordinaten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit $\vec{v} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i$. Wir definieren $f : V \to W$ durch $f(\vec{v}) := \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{w}_i$. Es gilt dann $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ für $i = 1, \ldots, m$. Für jedes $\alpha \in K$ gilt $\alpha\vec{v} = \sum_{i=1}^m (\alpha \cdot \lambda_i)\vec{v}_i$, also

$$f(\alpha\vec{v}) = \sum_{i=1}^m (\alpha \cdot \lambda_i)\vec{w}_i = \alpha \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i = \alpha f(\vec{v}).$$

Festlegung der Bilder der Basisvektoren: Beweis

Ist $\vec{u} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{v}_i \in V$, so gilt $\vec{v} + \vec{u} = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \mu_i) \vec{v}_i$

Festlegung der Bilder der Basisvektoren: Beweis

Ist $\vec{u} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{v}_i \in V$, so gilt $\vec{v} + \vec{u} = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \mu_i) \vec{v}_i$ und daher

$$f(\vec{v} + \vec{u}) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \mu_i) \vec{w}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{w}_i + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{w}_i = f(\vec{v}) + f(\vec{u}).$$

Festlegung der Bilder der Basisvektoren: Beweis

Ist $\vec{u} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{v}_i \in V$, so gilt $\vec{v} + \vec{u} = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \mu_i)\vec{v}_i$ und daher

$$f(\vec{v} + \vec{u}) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \mu_i)\vec{w}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{w}_i + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{w}_i = f(\vec{v}) + f(\vec{u}).$$

Die so bestimmte Abbildung $f : V \to W$ ist also linear.

Festlegung der Bilder der Basisvektoren: Beweis

Ist $\vec{u} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{v}_i \in V$, so gilt $\vec{v} + \vec{u} = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \mu_i)\vec{v}_i$ und daher

$$f(\vec{v} + \vec{u}) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \mu_i)\vec{w}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{w}_i + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{w}_i = f(\vec{v}) + f(\vec{u}).$$

Die so bestimmte Abbildung $f : V \to W$ ist also linear.

Seien nun $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ mit $f(\vec{v}_i) = g(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ für $i = 1, \ldots, m$. Ist dann $\vec{v} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i$, so folgt

$$f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{w}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g(\vec{v}_i) = g\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i\right) = g(\vec{v}),$$

d.h. es gilt $f = g$ und f ist somit eindeutig bestimmt.

Kern und Bildmenge

Definition

Seien V und W zwei K-Vektorräume und sei $f \in \mathcal{L}(V, W)$, dann definieren wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(f) &:= \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = 0\}, \\ \mathrm{Bild}(f) &:= \{f(\vec{v}) \in W \mid \vec{v} \in V\}. \end{aligned}$$

Für $\vec{w} \in W$ definieren wir das Urbild von $\vec{w}$ in V als

$$f^{-1}(\vec{w}) := f^{-1}(\{\vec{w}\}) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$

Kern und Bildmenge

Definition

Seien V und W zwei K-Vektorräume und sei $f \in \mathcal{L}(V, W)$, dann definieren wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(f) &:= \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = 0\}, \\ \mathrm{Bild}(f) &:= \{f(\vec{v}) \in W \mid \vec{v} \in V\}. \end{aligned}$$

Für $\vec{w} \in W$ definieren wir das Urbild von $\vec{w}$ in V als

$$f^{-1}(\vec{w}) := f^{-1}(\{\vec{w}\}) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$

Wie bereits erwähnt wurde, ist in der Definition des Urbildes $f^{-1}(\vec{w})$ nicht die Umkehrabbildung von f angewendet auf $\vec{w}$ gemeint, sondern eine Teilmenge von V. Insbesondere gilt $f^{-1}(\vec{0}) = \mathrm{Kern}(f)$.

Beispiel

Betrachte die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{Q}^{3,1} \longrightarrow \mathbb{Q}^{2,1}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Beispiel

Betrachte die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{Q}^{3,1} \to \mathbb{Q}^{2,1}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Dann ist offensichtlich $\mathrm{Bild}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{Q} \right\}$

Beispiel

Betrachte die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{Q}^{3,1} \to \mathbb{Q}^{2,1}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Dann ist offensichtlich $\mathrm{Bild}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{Q} \right\}$ und

$$\mathrm{Kern}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Beispiel

Betrachte die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{Q}^{3,1} \longrightarrow \mathbb{Q}^{2,1}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Dann ist offensichtlich $\mathrm{Bild}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{Q} \right\}$ und

$$\mathrm{Kern}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Kern und Bild sind Vektorräume (das kein Zufall ist!) und

$$\dim \mathrm{Kern}(f) = 2, \quad \dim \mathrm{Bild}(f) = 1.$$