Eigenschaften von linearen Abbildungen

Lineare Algebra I

Kapitel 10

3. Juli 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/˜holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Kern und Bildmenge

Definition

Seien V und W zwei K-Vektorräume und sei $f \in \mathcal{L}(V, W)$, dann definieren wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(f) &:= \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = 0\}, \\ \mathrm{Bild}(f) &:= \{f(\vec{v}) \in W \mid \vec{v} \in V\}. \end{aligned}$$

Für $\vec{w} \in W$ definieren wir das Urbild von $\vec{w}$ in V als

$$f^{-1}(\vec{w}) \quad := \quad f^{-1}(\{\vec{w}\}) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$

Kern und Bildmenge

Definition

Seien V und W zwei K-Vektorräume und sei $f \in \mathcal{L}(V, W)$, dann definieren wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(f) &:= \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = 0\}, \\ \mathrm{Bild}(f) &:= \{f(\vec{v}) \in W \mid \vec{v} \in V\}. \end{aligned}$$

Für $\vec{w} \in W$ definieren wir das Urbild von $\vec{w}$ in V als

$$f^{-1}(\vec{w}) \quad := \quad f^{-1}(\{\vec{w}\}) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$

Wie bereits erwähnt wurde, ist in der Definition des Urbildes $f^{-1}(\vec{w})$ nicht die Umkehrabbildung von f angewendet auf $\vec{w}$ gemeint, sondern eine Teilmenge von V. Insbesondere gilt $f^{-1}(\vec{0}) = \mathrm{Kern}(f)$.

Eigenschaften von Kern und Bildmenge

Lemma.
Sind V, W zwei K-Vektorräume, so gelten für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$:

(1) $f(\vec{0}) = \vec{0}$ und $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$ für alle $\vec{v} \in V$.

Eigenschaften von Kern und Bildmenge

Lemma.

Sind V, W zwei K-Vektorräume, so gelten für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$:

(1) $f(\vec{0}) = \vec{0}$ und $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$ für alle $\vec{v} \in V$.

(2) Ist f ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

Eigenschaften von Kern und Bildmenge

Lemma.
Sind V, W zwei K-Vektorräume, so gelten für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$:

(1) $f(\vec{0}) = \vec{0}$ und $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$ für alle $\vec{v} \in V$.

(2) Ist f ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

(3) $\mathrm{Kern}(f)$ ist ein Unterraum von V, $\mathrm{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W.

Eigenschaften von Kern und Bildmenge

Lemma.
Sind V, W zwei K-Vektorräume, so gelten für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$:

(1) $f(\vec{0}) = \vec{0}$ und $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$ für alle $\vec{v} \in V$.

(2) Ist f ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

(3) $\mathrm{Kern}(f)$ ist ein Unterraum von V, $\mathrm{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W.

(4) f ist surjektiv, genau dann wenn $\mathrm{Bild}(f) = W$ ist.

Eigenschaften von Kern und Bildmenge

Lemma.
Sind V, W zwei K-Vektorräume, so gelten für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$:

(1) $f(\vec{0}) = \vec{0}$ und $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$ für alle $\vec{v} \in V$.

(2) Ist f ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

(3) $\mathrm{Kern}(f)$ ist ein Unterraum von V, $\mathrm{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W.

(4) f ist surjektiv, genau dann wenn $\mathrm{Bild}(f) = W$ ist.

(5) f ist injektiv, genau dann wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$ ist.

Eigenschaften von Kern und Bildmenge

Lemma.
Sind V, W zwei K-Vektorräume, so gelten für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$:

(1) $f(\vec{0}) = \vec{0}$ und $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$ für alle $\vec{v} \in V$.

(2) Ist f ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

(3) $\mathrm{Kern}(f)$ ist ein Unterraum von V, $\mathrm{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W.

(4) f ist surjektiv, genau dann wenn $\mathrm{Bild}(f) = W$ ist.

(5) f ist injektiv, genau dann wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$ ist.

(6) Ist f injektiv und sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in V$ linear unabhängig, so sind auch die Bilder $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m) \in W$ linear unabhängig.

Eigenschaften von Kern und Bildmenge

Lemma.
Sind V, W zwei K-Vektorräume, so gelten für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$:

(1) $f(\vec{0}) = \vec{0}$ und $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$ für alle $\vec{v} \in V$.

(2) Ist f ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

(3) $\mathrm{Kern}(f)$ ist ein Unterraum von V, $\mathrm{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W.

(4) f ist surjektiv, genau dann wenn $\mathrm{Bild}(f) = W$ ist.

(5) f ist injektiv, genau dann wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$ ist.

(6) Ist f injektiv und sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in V$ linear unabhängig, so sind auch die Bilder $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m) \in W$ linear unabhängig.

(7) Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in V$ linear abhängig, so sind auch die Bilder $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m) \in W$ linear abhängig. (Äquivalent: Sind $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m) \in W$ linear unabhängig, so sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in V$ linear unabhängig.)

Eigenschaften von Kern und Bildmenge

Lemma.

Sind V, W zwei K-Vektorräume, so gelten für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$:

(1) $f(\vec{0}) = \vec{0}$ und $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$ für alle $\vec{v} \in V$.

(2) Ist f ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

(3) $\mathrm{Kern}(f)$ ist ein Unterraum von V, $\mathrm{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W.

(4) f ist surjektiv, genau dann wenn $\mathrm{Bild}(f) = W$ ist.

(5) f ist injektiv, genau dann wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$ ist.

(6) Ist f injektiv und sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in V$ linear unabhängig, so sind auch die Bilder $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m) \in W$ linear unabhängig.

(7) Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in V$ linear abhängig, so sind auch die Bilder $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m) \in W$ linear abhängig. (Äquivalent: Sind $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m) \in W$ linear unabhängig, so sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in V$ linear unabhängig.)

(8) Ist $\vec{w} \in \mathrm{Bild}(f)$ und ist $\vec{u} \in f^{-1}(\vec{w})$ beliebig, so gilt $f^{-1}(\vec{w}) = \vec{u} + \mathrm{Kern}(f) := \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{v} \in \mathrm{Kern}(f)\}$.

(1) Es gelten $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$ sowie $f(\vec{v}) + f(-\vec{v}) = f(\vec{v} + (-\vec{v})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, für alle $\vec{v} \in V$.

(1) Es gelten $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$ sowie $f(\vec{v}) + f(-\vec{v}) = f(\vec{v} + (-\vec{v})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, für alle $\vec{v} \in V$.

(2) Die Existenz der Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ ist klar. Wir haben zu zeigen, dass f^{-1} linear ist. Sind $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$, so gibt es eindeutig bestimmte $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ mit $\vec{w}_1 = f(\vec{v}_1)$ und $\vec{w}_2 = f(\vec{v}_2)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} f^{-1}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) &= f^{-1}(f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)) = f^{-1}(f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ &= f^{-1}(\vec{w}_1) + f^{-1}(\vec{w}_2)\,. \end{aligned}$$

(1) Es gelten $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$ sowie
$f(\vec{v}) + f(-\vec{v}) = f(\vec{v} + (-\vec{v})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, für alle $\vec{v} \in V$.

(2) Die Existenz der Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ ist klar. Wir haben zu zeigen, dass f^{-1} linear ist. Sind $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$, so gibt es eindeutig bestimmte $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ mit $\vec{w}_1 = f(\vec{v}_1)$ und $\vec{w}_2 = f(\vec{v}_2)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} f^{-1}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) &= f^{-1}(f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)) = f^{-1}(f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ &= f^{-1}(\vec{w}_1) + f^{-1}(\vec{w}_2)\,. \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$f^{-1}(\lambda \vec{w}_1) = f^{-1}(\lambda f(\vec{v}_1)) = f^{-1}(f(\lambda \vec{v}_1)) = \lambda \vec{v}_1 = \lambda f^{-1}(\vec{w}_1)$$

für jedes $\lambda \in K$.

(1) Es gelten $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$ sowie $f(\vec{v}) + f(-\vec{v}) = f(\vec{v} + (-\vec{v})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, für alle $\vec{v} \in V$.

(2) Die Existenz der Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ ist klar. Wir haben zu zeigen, dass f^{-1} linear ist. Sind $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$, so gibt es eindeutig bestimmte $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ mit $\vec{w}_1 = f(\vec{v}_1)$ und $\vec{w}_2 = f(\vec{v}_2)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} f^{-1}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) &= f^{-1}(f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)) = f^{-1}(f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ &= f^{-1}(\vec{w}_1) + f^{-1}(\vec{w}_2)\,. \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$f^{-1}(\lambda \vec{w}_1) = f^{-1}(\lambda f(\vec{v}_1)) = f^{-1}(f(\lambda \vec{v}_1)) = \lambda \vec{v}_1 = \lambda f^{-1}(\vec{w}_1)$$

für jedes $\lambda \in K$.

(3) und (4) sind offensichtlich aus den jeweiligen Definitionen.

(1) Es gelten $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$ sowie $f(\vec{v}) + f(-\vec{v}) = f(\vec{v} + (-\vec{v})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, für alle $\vec{v} \in V$.

(2) Die Existenz der Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ ist klar. Wir haben zu zeigen, dass f^{-1} linear ist. Sind $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$, so gibt es eindeutig bestimmte $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ mit $\vec{w}_1 = f(\vec{v}_1)$ und $\vec{w}_2 = f(\vec{v}_2)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} f^{-1}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) &= f^{-1}(f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)) = f^{-1}(f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ &= f^{-1}(\vec{w}_1) + f^{-1}(\vec{w}_2)\,. \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$f^{-1}(\lambda \vec{w}_1) = f^{-1}(\lambda f(\vec{v}_1)) = f^{-1}(f(\lambda \vec{v}_1)) = \lambda \vec{v}_1 = \lambda f^{-1}(\vec{w}_1)$$

für jedes $\lambda \in K$.

(3) und (4) sind offensichtlich aus den jeweiligen Definitionen.

(5) Sei f injektiv und $\vec{v} \in \mathrm{Kern}(f)$, d.h. $f(\vec{v}) = \vec{0}$. Aus (1) wissen wir, dass $f(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt, also folgt $f(\vec{v}) = f(\vec{0})$. Daher gilt $\vec{v} = \vec{0}$ aufgrund der Injektivität von f. Sei nun $\mathrm{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$ und seien $\vec{u}, \vec{v} \in V$ mit $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$. Dann folgt $f(\vec{u} - \vec{v}) = 0$, also $\vec{u} - \vec{v} \in \mathrm{Kern}(f)$ und somit $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$ bzw. $\vec{u} = \vec{v}$.

(6) Sei $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(\vec{v}_i) = \vec{0}$. Dann gilt wegen der Linearität von f, dass

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i\right) = \vec{0} \quad \text{also} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i \in \mathrm{Kern}(f).$$

Aus der Injektivität folgt $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i = 0$ und damit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$.

(6) Sei $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(\vec{v}_i) = \vec{0}$. Dann gilt wegen der Linearität von f, dass

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i\right) = \vec{0} \quad \text{also} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i \in \mathrm{Kern}(f).$$

Aus der Injektivität folgt $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i = 0$ und damit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$.

(7) Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ linear abhängig, so existieren Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$, die nicht alle gleich Null sind, mit $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$.

(6) Sei $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(\vec{v}_i) = \vec{0}$. Dann gilt wegen der Linearität von f, dass

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i\right) = \vec{0} \quad \text{also} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i \in \mathrm{Kern}(f).$$

Aus der Injektivität folgt $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i = 0$ und damit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$.

(7) Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ linear abhängig, so existieren Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$, die nicht alle gleich Null sind, mit $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$. Nach Anwendung von f auf beiden Seiten und Ausnutzen der Linearität folgt $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(\vec{v}_i) = \vec{0}$, also sind $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m)$ linear abhängig.

(6) Sei $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(\vec{v}_i) = \vec{0}$. Dann gilt wegen der Linearität von f, dass

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i\right) = \vec{0} \quad \text{also} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i \in \mathrm{Kern}(f).$$

Aus der Injektivität folgt $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i = 0$ und damit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$.

(7) Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ linear abhängig, so existieren Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$, die nicht alle gleich Null sind, mit $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$. Nach Anwendung von f auf beiden Seiten und Ausnutzen der Linearität folgt $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(\vec{v}_i) = \vec{0}$, also sind $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m)$ linear abhängig.

(8) Sei $\vec{w} \in \mathrm{Bild}(f)$ und $\vec{u} \in f^{-1}(\vec{w})$. Ist $\vec{y} \in f^{-1}(\vec{w})$, so gilt $f(\vec{y}) = f(\vec{u})$, daher $f(\vec{y} - \vec{u}) = \vec{0}$, also $\vec{y} - \vec{u} \in \mathrm{Kern}(f)$ bzw. $\vec{y} \in \vec{u} + \mathrm{Kern}(f)$, d.h. $f^{-1}(\vec{w}) \subseteq \vec{u} + \mathrm{Kern}(f)$.

(6) Sei $\sum_{i=1}^m \lambda_i f(\vec{v}_i) = \vec{0}$. Dann gilt wegen der Linearität von f, dass

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i\right) = \vec{0} \quad \text{also} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i \in \mathrm{Kern}(f).$$

Aus der Injektivität folgt $\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i = 0$ und damit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$.

(7) Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ linear abhängig, so existieren Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$, die nicht alle gleich Null sind, mit $\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$. Nach Anwendung von f auf beiden Seiten und Ausnutzen der Linearität folgt $\sum_{i=1}^m \lambda_i f(\vec{v}_i) = \vec{0}$, also sind $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m)$ linear abhängig.

(8) Sei $\vec{w} \in \mathrm{Bild}(f)$ und $\vec{u} \in f^{-1}(\vec{w})$. Ist $\vec{y} \in f^{-1}(\vec{w})$, so gilt $f(\vec{y}) = f(\vec{u})$, daher $f(\vec{y} - \vec{u}) = \vec{0}$, also $\vec{y} - \vec{u} \in \mathrm{Kern}(f)$ bzw. $\vec{y} \in \vec{u} + \mathrm{Kern}(f)$, d.h. $f^{-1}(\vec{w}) \subseteq \vec{u} + \mathrm{Kern}(f)$. Ist nun $\vec{y} \in \vec{u} + \mathrm{Kern}(f)$, so gilt $f(\vec{y}) = f(\vec{u}) = \vec{w}$, also $\vec{y} \in f^{-1}(\vec{w})$, d.h. $\vec{u} + \mathrm{Kern}(f) \subseteq f^{-1}(\vec{w})$.

Dimensionsformel

Satz. Seien V und W zwei K-Vektorräume und sei V endlichdimesional. Dann gilt

$$\dim(V) \;=\; \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f))$$

für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$.

Dimensionsformel

Satz. Seien V und W zwei K-Vektorräume und sei V endlichdimesional. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f))$$

für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$.

Beweis. Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$. Sind $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n) \in W$ linear unabhängig, so sind nach (7) im Lemma auch $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängig,

Dimensionsformel

Satz. Seien V und W zwei K-Vektorräume und sei V endlichdimesional. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f))$$

für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$.

Beweis. Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$. Sind $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n) \in W$ linear unabhängig, so sind nach (7) im Lemma auch $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängig, also gilt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq \dim(V)$. Aus $\mathrm{Kern}(f) \subseteq V$ folgt $\dim(\mathrm{Kern}(f)) \leq \dim(V)$, so dass $\mathrm{Bild}(f)$ und $\mathrm{Kern}(f)$ beide endlichdimensional sind.

Dimensionsformel

Satz. Seien V und W zwei K-Vektorräume und sei V endlichdimesional. Dann gilt

$$\dim(V) \;=\; \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f))$$

für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$.

Beweis. Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$. Sind $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n) \in W$ linear unabhängig, so sind nach (7) im Lemma auch $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängig, also gilt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq \dim(V)$. Aus $\mathrm{Kern}(f) \subseteq V$ folgt $\dim(\mathrm{Kern}(f)) \leq \dim(V)$, so dass $\mathrm{Bild}(f)$ und $\mathrm{Kern}(f)$ beide endlichdimensional sind.

Seien $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_r\}$ bzw. $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ Basen von $\mathrm{Bild}(f)$ bzw. $\mathrm{Kern}(f)$ und seien $\vec{u}_1 \in f^{-1}(\vec{w}_1), \ldots, \vec{u}_r \in f^{-1}(\vec{w}_r)$.

Dimensionsformel

Satz. Seien V und W zwei K-Vektorräume und sei V endlichdimesional. Dann gilt

$$\dim(V) \;=\; \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f))$$

für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$.

Beweis. Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$. Sind $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n) \in W$ linear unabhängig, so sind nach (7) im Lemma auch $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängig, also gilt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq \dim(V)$. Aus $\mathrm{Kern}(f) \subseteq V$ folgt $\dim(\mathrm{Kern}(f)) \leq \dim(V)$, so dass $\mathrm{Bild}(f)$ und $\mathrm{Kern}(f)$ beide endlichdimensional sind.

Seien $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_r\}$ bzw. $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ Basen von $\mathrm{Bild}(f)$ bzw. $\mathrm{Kern}(f)$ und seien $\vec{u}_1 \in f^{-1}(\vec{w}_1), \ldots, \vec{u}_r \in f^{-1}(\vec{w}_r)$. Wir zeigen, dass $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ eine Basis von V ist, woraus die Behauptung folgt.

Dimensionsformel

Satz. Seien V und W zwei K-Vektorräume und sei V endlichdimesional. Dann gilt

$$\dim(V) \;=\; \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f))$$

für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$.

Beweis. Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$. Sind $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n) \in W$ linear unabhängig, so sind nach (7) im Lemma auch $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängig, also gilt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq \dim(V)$. Aus $\mathrm{Kern}(f) \subseteq V$ folgt $\dim(\mathrm{Kern}(f)) \leq \dim(V)$, so dass $\mathrm{Bild}(f)$ und $\mathrm{Kern}(f)$ beide endlichdimensional sind.

Seien $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_r\}$ bzw. $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ Basen von $\mathrm{Bild}(f)$ bzw. $\mathrm{Kern}(f)$ und seien $\vec{u}_1 \in f^{-1}(\vec{w}_1), \ldots, \vec{u}_r \in f^{-1}(\vec{w}_r)$. Wir zeigen, dass $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ eine Basis von V ist, woraus die Behauptung folgt.

Ist $\vec{v} \in V$, so gibt es eindeutige Koordinaten $\mu_1, \ldots, \mu_r \in K$, so dass $f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \vec{w}_i$.

Dimensionsformel

Satz. Seien V und W zwei K-Vektorräume und sei V endlichdimesional. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f))$$

für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$.

Beweis. Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$. Sind $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n) \in W$ linear unabhängig, so sind nach (7) im Lemma auch $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängig, also gilt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq \dim(V)$. Aus $\mathrm{Kern}(f) \subseteq V$ folgt $\dim(\mathrm{Kern}(f)) \leq \dim(V)$, so dass $\mathrm{Bild}(f)$ und $\mathrm{Kern}(f)$ beide endlichdimensional sind.

Seien $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_r\}$ bzw. $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ Basen von $\mathrm{Bild}(f)$ bzw. $\mathrm{Kern}(f)$ und seien $\vec{u}_1 \in f^{-1}(\vec{w}_1), \ldots, \vec{u}_r \in f^{-1}(\vec{w}_r)$. Wir zeigen, dass $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ eine Basis von V ist, woraus die Behauptung folgt.

Ist $\vec{v} \in V$, so gibt es eindeutige Koordinaten $\mu_1, \ldots, \mu_r \in K$, so dass $f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \vec{w}_i$. Sei $\vec{y} := \sum_{i=1}^{r} \mu_i \vec{u}_i$, dann folgt $f(\vec{y}) = f(\vec{v})$, also $\vec{v} - \vec{y} \in \mathrm{Kern}(f)$,

Dimensionsformel

Satz. Seien V und W zwei K-Vektorräume und sei V endlichdimesional. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f))$$

für jedes $f \in \mathcal{L}(V, W)$.

Beweis. Seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$. Sind $f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_n) \in W$ linear unabhängig, so sind nach (7) im Lemma auch $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ linear unabhängig, also gilt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq \dim(V)$. Aus $\mathrm{Kern}(f) \subseteq V$ folgt $\dim(\mathrm{Kern}(f)) \leq \dim(V)$, so dass $\mathrm{Bild}(f)$ und $\mathrm{Kern}(f)$ beide endlichdimensional sind.

Seien $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_r\}$ bzw. $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ Basen von $\mathrm{Bild}(f)$ bzw. $\mathrm{Kern}(f)$ und seien $\vec{u}_1 \in f^{-1}(\vec{w}_1), \dots, \vec{u}_r \in f^{-1}(\vec{w}_r)$. Wir zeigen, dass $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ eine Basis von V ist, woraus die Behauptung folgt.

Ist $\vec{v} \in V$, so gibt es eindeutige Koordinaten $\mu_1, \dots, \mu_r \in K$, so dass $f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^r \mu_i \vec{w}_i$. Sei $\vec{y} := \sum_{i=1}^r \mu_i \vec{u}_i$, dann folgt $f(\vec{y}) = f(\vec{v})$, also $\vec{v} - \vec{y} \in \mathrm{Kern}(f)$, d.h. $\vec{v} - \vec{y} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i$ für gewisse Koordinaten $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$.

Es folgt

$$\vec{v} \;=\; \vec{y} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i \;=\; \sum_{i=1}^{r} \mu_i \vec{u}_i \,+\, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i\,,$$

also $\vec{v} \in \mathrm{span}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$. Wegen $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \subset V$ gilt somit

$$V = \mathrm{span}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

und es bleibt zu zeigen, dass $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear unabhängig sind.

Es folgt

$$\vec{v} \;=\; \vec{y} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i \;=\; \sum_{i=1}^{r} \mu_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i\,,$$

also $\vec{v} \in \operatorname{span}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$. Wegen $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \subset V$ gilt somit

$$V = \operatorname{span}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

und es bleibt zu zeigen, dass $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear unabhängig sind.

Sei

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \vec{v}_i \;=\; \vec{0},$$

dann folgt

$$\vec{0} \;=\; f(\vec{0}) \;=\; f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \vec{v}_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(\vec{u}_i) \;=\; \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{w}_i$$

Es folgt

$$\vec{v} \;=\; \vec{y} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i \;=\; \sum_{i=1}^{r} \mu_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i\,,$$

also $\vec{v} \in \mathrm{span}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$. Wegen $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \subset V$ gilt somit

$$V = \mathrm{span}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

und es bleibt zu zeigen, dass $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear unabhängig sind.

Sei

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \vec{v}_i \;=\; \vec{0},$$

dann folgt

$$\vec{0} \;=\; f(\vec{0}) \;=\; f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \vec{v}_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(\vec{u}_i) \;=\; \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{w}_i$$

und somit $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$, denn $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_r$ sind linear unabhängig. Aus der linearen Unabhängigkeit von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ folgt dann $\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$.

Isomorphie

Korollar Zwei endlichdimensionale K-Vektorräume V und W sind isomorph, genau dann wenn $\dim(V) = \dim(W)$ gilt.

Beweis. Gilt $V \cong W$, so gibt es eine bijektive Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Nach (4) und (5) in Lemma sind dann $\mathrm{Bild}(f) = W$ und $\mathrm{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$. Mit der Dimensionsformel erhalten wir

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(W) + \dim(\{\vec{0}\}) = \dim(W).$$

Isomorphie

Korollar Zwei endlichdimensionale K-Vektorräume V und W sind isomorph, genau dann wenn $\dim(V) = \dim(W)$ gilt.

Beweis. Gilt $V \cong W$, so gibt es eine bijektive Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Nach (4) und (5) in Lemma sind dann $\mathrm{Bild}(f) = W$ und $\mathrm{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$. Mit der Dimensionsformel erhalten wir

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(W) + \dim(\{\vec{0}\}) = \dim(W).$$

Sei nun $\dim(V) = \dim(W)$ und seien $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ und $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ Basen von V und W. Es gibt genau eine Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, W)$ mit $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Isomorphie

Korollar Zwei endlichdimensionale K-Vektorräume V und W sind isomorph, genau dann wenn $\dim(V) = \dim(W)$ gilt.

Beweis. Gilt $V \cong W$, so gibt es eine bijektive Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Nach (4) und (5) in Lemma sind dann $\mathrm{Bild}(f) = W$ und $\mathrm{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$. Mit der Dimensionsformel erhalten wir

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(W) + \dim(\{\vec{0}\}) = \dim(W).$$

Sei nun $\dim(V) = \dim(W)$ und seien $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ und $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ Basen von V und W. Es gibt genau eine Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, W)$ mit $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ist $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n \in \mathrm{Kern}(f)$, so gilt

$$\begin{aligned} \vec{0} &= f(\vec{v}) = f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{v}_n) \\ &= \lambda_1 \vec{w}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{w}_n. \end{aligned}$$

Isomorphie

Korollar Zwei endlichdimensionale K-Vektorräume V und W sind isomorph, genau dann wenn $\dim(V) = \dim(W)$ gilt.

Beweis. Gilt $V \cong W$, so gibt es eine bijektive Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Nach (4) und (5) in Lemma sind dann $\mathrm{Bild}(f) = W$ und $\mathrm{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$. Mit der Dimensionsformel erhalten wir

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(W) + \dim(\{\vec{0}\}) = \dim(W).$$

Sei nun $\dim(V) = \dim(W)$ und seien $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ und $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ Basen von V und W. Es gibt genau eine Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, W)$ mit $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ist $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n \in \mathrm{Kern}(f)$, so gilt

$$\begin{aligned} \vec{0} &= f(\vec{v}) = f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{v}_n) \\ &= \lambda_1 \vec{w}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{w}_n. \end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, also $\vec{v} = \vec{0}$ und daher $\mathrm{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$. Aus der Dimensionsformel erhalten wir dann $\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(W)$ und somit $\mathrm{Bild}(f) = W$, d.h. f ist surjektiv.