Lineare Abbildungen und Matrizen

Lineare Algebra I

Kapitel 10

9. Juli 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/~holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Darstellende Matrix

Seien V, W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume mit Basen $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ von V und $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ von W und sei $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Es gibt zu jedem $f(\vec{v}_j) \in W$, $j = 1, \dots, m$, eindeutig bestimmte Koordinaten $a_{ij} \in K$, $i = 1, \dots, n$, so dass

$$f(\vec{v}_j) \; = \; a_{1j}\vec{w}_1 + \cdots + a_{nj}\vec{w}_n.$$

Darstellende Matrix

Seien V, W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume mit Basen $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ von V und $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ von W und sei $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Es gibt zu jedem $f(\vec{v}_j) \in W$, $j = 1, \ldots, m$, eindeutig bestimmte Koordinaten $a_{ij} \in K$, $i = 1, \ldots, n$, so dass

$$f(\vec{v}_j) \;=\; a_{1j}\vec{w}_1 + \cdots + a_{nj}\vec{w}_n.$$

Wir können mit Hilfe der Matrix $A := [a_{ij}] \in K^{n,m}$ die m Gleichungen für die Vektoren $f(\vec{v}_j)$ als System schreiben:

$$(f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m)) \;=\; (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)\, A.$$

Die Matrix A ist durch f und die gewählten Basen von V und W eindeutig bestimmt. Sie heißt die Matrixdarstellung oder die darstellende Matrix der Abbildung f.

Wirkung auf Koordinaten

Ist $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_m \vec{v}_m \in V$, dann gilt

$$\begin{aligned}
f(\vec{v}) &= f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots \lambda_m \vec{v}_m) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \cdots + \lambda_m f(\vec{v}_m) \\
&= (f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m)) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = ((\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)\, A) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \\
&= (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n) \left(A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \right) .
\end{aligned}$$

Wirkung auf Koordinaten

Ist $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_m \vec{v}_m \in V$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
f(\vec{v}) &= f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots \lambda_m \vec{v}_m) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \cdots + \lambda_m f(\vec{v}_m) \\
&= (f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m)) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = ((\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)\, A) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \\
&= (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n) \left(A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \right) .
\end{aligned}
$$

Die Koordinaten des Bildvektors $f(\vec{v})$ bezüglich der Basis $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ von W sind somit gegeben durch

$$
A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} .
$$

Matrixdarstellung ist selbst Isomorphismus

Theorem
Seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume mit Basen $B_1 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ von V und $B_2 = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ von W. Dann ist die Abbildung

$$\mathcal{L}(V, W) \to K^{n,m}, \quad f \mapsto [f]_{B_1,B_2}$$

ein Isomorphismus, wobei $[f]_{B_1,B_2}$ die darstellende Matrix von f bezüglich B_1 und B_2 bedeutet. Also

$$\mathcal{L}(V, W) \cong K^{n,m}$$

und

$$\dim(\mathcal{L}(V, W)) = \dim(K^{n,m}) = n \cdot m.$$

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass die Abbildung linear ist. Sei die Abbildung dazu bezeichnet mit Mat, also $\mathrm{Mat}(f) = [f]_{B_1,B_2}$ und seien $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$, sowie $\mathrm{Mat}(f) = [f]_{B_1,B_2} = [f_{ij}]$ und $\mathrm{Mat}(g) = [g]_{B_1,B_2} = [g_{ij}]$.

Für $j = 1, \ldots, m$ gilt

$$(f+g)(\vec{v}_j) = f(\vec{v}_j) + g(\vec{v}_j) \; = \; \sum_{i=1}^{n} f_{ij}\vec{w}_i \; + \; \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\vec{w}_i = \sum_{i=1}^{n} (f_{ij} + g_{ij})\vec{w}_i$$

und somit $\mathrm{Mat}(f+g) = [f_{ij} + g_{ij}] = [f_{ij}] + [g_{ij}] = \mathrm{Mat}(f) + \mathrm{Mat}(g)$.

Für $j = 1, \ldots, m$ gilt

$$(f+g)(\vec{v}_j) = f(\vec{v}_j) + g(\vec{v}_j) \;=\; \sum_{i=1}^{n} f_{ij}\vec{w}_i \;+\; \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\vec{w}_i = \sum_{i=1}^{n}(f_{ij}+g_{ij})\vec{w}_i$$

und somit $\mathrm{Mat}(f+g) = [f_{ij}+g_{ij}] = [f_{ij}] + [g_{ij}] = \mathrm{Mat}(f) + \mathrm{Mat}(g)$.
Für $\lambda \in K$ und $j = 1, \ldots, m$ gilt

$$(\lambda f)(\vec{v}_j) = \lambda f(\vec{v}_j) \;=\; \lambda \sum_{i=1}^{n} f_{ij}\vec{w}_i = \sum_{i=1}^{n}(\lambda f_{ij})\vec{w}_i$$

und daher $\mathrm{Mat}(\lambda f) = [\lambda f_{ij}] = \lambda\,[f_{ij}] = \lambda\,\mathrm{Mat}(f)$.

Für $j = 1, \ldots, m$ gilt

$$(f+g)(\vec{v}_j) = f(\vec{v}_j) + g(\vec{v}_j) \;=\; \sum_{i=1}^{n} f_{ij}\vec{w}_i \;+\; \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\vec{w}_i = \sum_{i=1}^{n}(f_{ij}+g_{ij})\vec{w}_i$$

und somit $\mathrm{Mat}(f+g) = [f_{ij}+g_{ij}] = [f_{ij}] + [g_{ij}] = \mathrm{Mat}(f) + \mathrm{Mat}(g)$.
Für $\lambda \in K$ und $j = 1, \ldots, m$ gilt

$$(\lambda f)(\vec{v}_j) = \lambda f(\vec{v}_j) \;=\; \lambda \sum_{i=1}^{n} f_{ij}\vec{w}_i = \sum_{i=1}^{n}(\lambda f_{ij})\vec{w}_i$$

und daher $\mathrm{Mat}(\lambda f) = [\lambda f_{ij}] = \lambda\,[f_{ij}] = \lambda\,\mathrm{Mat}(f)$. Die Abbildung $f \mapsto [f]_{B_1,B_2}$ ist deswegen linear.

Für $j = 1, \dots, m$ gilt

$$(f+g)(\vec{v}_j) = f(\vec{v}_j) + g(\vec{v}_j) \;=\; \sum_{i=1}^{n} f_{ij}\vec{w}_i \;+\; \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\vec{w}_i = \sum_{i=1}^{n}(f_{ij}+g_{ij})\vec{w}_i$$

und somit $\mathrm{Mat}(f+g) = [f_{ij}+g_{ij}] = [f_{ij}] + [g_{ij}] = \mathrm{Mat}(f) + \mathrm{Mat}(g)$.
Für $\lambda \in K$ und $j = 1, \dots, m$ gilt

$$(\lambda f)(\vec{v}_j) = \lambda f(\vec{v}_j) \;=\; \lambda \sum_{i=1}^{n} f_{ij}\vec{w}_i = \sum_{i=1}^{n}(\lambda f_{ij})\vec{w}_i$$

und daher $\mathrm{Mat}(\lambda f) = [\lambda f_{ij}] = \lambda\,[f_{ij}] = \lambda\,\mathrm{Mat}(f)$. Die Abbildung $f \mapsto [f]_{B_1,B_2}$ ist deswegen linear.

Bijektivität von Mat. Ist $f \in \mathrm{Kern}(\mathrm{Mat})$, so gilt $\mathrm{Mat}(f) = 0 \in K^{n,m}$, also $f(\vec{v}_j) = 0$, für $j = 1, \dots, m$. Daher ist $f(\vec{v}) = 0$ für alle $\vec{v} \in V$, also $f = 0$ (die Nullabbildung). Somit ist f injektiv.

Für $j = 1, \ldots, m$ gilt

$$(f+g)(\vec{v}_j) = f(\vec{v}_j) + g(\vec{v}_j) \ = \ \sum_{i=1}^{n} f_{ij}\vec{w}_i \ + \ \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\vec{w}_i = \sum_{i=1}^{n}(f_{ij}+g_{ij})\vec{w}_i$$

und somit $\mathrm{Mat}(f+g) = [f_{ij}+g_{ij}] = [f_{ij}] + [g_{ij}] = \mathrm{Mat}(f) + \mathrm{Mat}(g)$.
Für $\lambda \in K$ und $j = 1, \ldots, m$ gilt

$$(\lambda f)(\vec{v}_j) = \lambda f(\vec{v}_j) \ = \ \lambda \sum_{i=1}^{n} f_{ij}\vec{w}_i = \sum_{i=1}^{n}(\lambda f_{ij})\vec{w}_i$$

und daher $\mathrm{Mat}(\lambda f) = [\lambda f_{ij}] = \lambda\,[f_{ij}] = \lambda\,\mathrm{Mat}(f)$. Die Abbildung $f \mapsto [f]_{B_1,B_2}$ ist deswegen linear.

Bijektivität von Mat. Ist $f \in \mathrm{Kern}(\mathrm{Mat})$, so gilt $\mathrm{Mat}(f) = 0 \in K^{n,m}$, also $f(\vec{v}_j) = 0$, für $j = 1, \ldots, m$. Daher ist $f(\vec{v}) = 0$ für alle $\vec{v} \in V$, also $f = 0$ (die Nullabbildung). Somit ist f injektiv.

Surjektivität. Ist $A = [a_{ij}] \in K^{n,m}$ beliebig, so definieren wir die Abbildung $f : V \to W$ durch $f(\vec{v}_j) := \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{w}_i$, $j = 1, \ldots, m$. Dann ist f linear und es gilt $\mathrm{Mat}(f) = A$, also ist Mat auch surjektiv.

Für $j = 1, \ldots, m$ gilt

$$(f+g)(\vec{v}_j) = f(\vec{v}_j) + g(\vec{v}_j) \;=\; \sum_{i=1}^{n} f_{ij}\vec{w}_i \;+\; \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\vec{w}_i = \sum_{i=1}^{n} (f_{ij} + g_{ij})\vec{w}_i$$

und somit $\mathrm{Mat}(f+g) = [f_{ij} + g_{ij}] = [f_{ij}] + [g_{ij}] = \mathrm{Mat}(f) + \mathrm{Mat}(g)$.
Für $\lambda \in K$ und $j = 1, \ldots, m$ gilt

$$(\lambda f)(\vec{v}_j) = \lambda f(\vec{v}_j) \;=\; \lambda \sum_{i=1}^{n} f_{ij}\vec{w}_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda f_{ij})\vec{w}_i$$

und daher $\mathrm{Mat}(\lambda f) = [\lambda f_{ij}] = \lambda\,[f_{ij}] = \lambda\,\mathrm{Mat}(f)$. Die Abbildung $f \mapsto [f]_{B_1,B_2}$ ist deswegen linear.

Bijektivität von Mat. Ist $f \in \mathrm{Kern}(\mathrm{Mat})$, so gilt $\mathrm{Mat}(f) = 0 \in K^{n,m}$, also $f(\vec{v}_j) = 0$, für $j = 1, \ldots, m$. Daher ist $f(\vec{v}) = 0$ für alle $\vec{v} \in V$, also $f = 0$ (die Nullabbildung). Somit ist f injektiv.

Surjektivität. Ist $A = [a_{ij}] \in K^{n,m}$ beliebig, so definieren wir die Abbildung $f : V \to W$ durch $f(\vec{v}_j) := \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{w}_i$, $j = 1, \ldots, m$. Dann ist f linear und es gilt $\mathrm{Mat}(f) = A$, also ist Mat auch surjektiv.

Es gilt damit $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = \dim(K^{n,m}) = n \cdot m$.

Koordinatenabbildung

Definition

Ist $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis des K-Vektorraumes V, so ist die Abbildung

$$\Phi_B \;:\; V \to K^{n,1}, \quad \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n \mapsto \Phi_B(\vec{v}) := \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix},$$

ein Isomorphismus, den wir die Koordinatenabbildung von V bezüglich der Basis B nennen.

Koordinatenabbildung

Definition

Ist $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis des K-Vektorraumes V, so ist die Abbildung

$$\Phi_B \; : \; V \to K^{n,1}, \quad \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n \mapsto \Phi_B(\vec{v}) := \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix},$$

ein Isomorphismus, den wir die Koordinatenabbildung von V bezüglich der Basis B nennen.

Beweis: Die Linearität von Φ_B ist klar. Zudem gilt offensichtlich $\Phi_B(V) = K^{n,1}$, d.h. Φ_B ist surjektiv. Ist $\vec{v} \in \mathrm{Kern}(\Phi_B)$, dann sind die Koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich der Basis B gegeben durch $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, woraus $\vec{v} = 0$ und damit $\mathrm{Kern}(\Phi_B) = \{\vec{0}\}$ folgt. Also ist Φ_B injektiv.

Koordinatenabbildung und Basisübergang

Sind Φ_{B_1} und Φ_{B_2} die Koordinatenabbildungen von Vektorräumen V und W der Dimensionen m bzw. n, bezüglich der Basen B_1 und B_2, dann gilt $f = \Phi_{B_2}^{-1} \circ [f]_{B_1,B_2} \circ \Phi_{B_1}$, wobei die Matrix $[f]_{B_1,B_2} \in K^{n,m}$ als lineare Abbildung von $K^{m,1}$ nach $K^{n,1}$ interpretiert wird. (Die Abbildung Φ_{B_2} ist invertierbar.)

Koordinatenabbildung und Basisübergang

Sind Φ_{B_1} und Φ_{B_2} die Koordinatenabbildungen von Vektorräumen V und W der Dimensionen m bzw. n, bezüglich der Basen B_1 und B_2, dann gilt $f \;=\; \Phi_{B_2}^{-1} \circ [f]_{B_1,B_2} \circ \Phi_{B_1}$, wobei die Matrix $[f]_{B_1,B_2} \in K^{n,m}$ als lineare Abbildung von $K^{m,1}$ nach $K^{n,1}$ interpretiert wird. (Die Abbildung Φ_{B_2} ist invertierbar.)

Spezialfall: $V = W$, also $m = n$, und $f = \mathrm{Id}_V$ (die Identität auf V). Für die Matrixdarstellung von Id_V bez. Basen $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ von V gilt $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \;=\; (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)\, [\mathrm{Id}_V]_{B_1,B_2}$. Die Matrix $[\mathrm{Id}_V]_{B_1,B_2}$ ist somit genau die Basisübergangsmatrix, mit der man die Koordinaten von $v \in V$ bezüglich B_1 in Koordinaten bezüglich B_2 umrechnen kann. Andererseits

$$(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) \;=\; (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)\, [\mathrm{Id}_V]_{B_2,B_1}$$

und daher gilt

$$\left([\mathrm{Id}_V]_{B_1,B_2}\right)^{-1} \;=\; [\mathrm{Id}_V]_{B_2,B_1}.$$

Matrizenmultiplikation entspricht Komposition

Hauptsatz. Seien V, W und Y drei K-Vektorräume. Sind $f \in \mathcal{L}(V, W)$ und $g \in \mathcal{L}(W, Y)$, dann gilt $g \circ f \in \mathcal{L}(V, Y)$. Sind V, W und Y endlichdimensional mit entsprechenden Basen $B_1 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$, $B_2 = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ und $B_3 = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_s\}$, so gilt

$$[g \circ f]_{B_1, B_3} \; = \; [g]_{B_2, B_3} \, [f]_{B_1, B_2} \, .$$

Matrizenmultiplikation entspricht Komposition

Hauptsatz. Seien V, W und Y drei K-Vektorräume. Sind $f \in \mathcal{L}(V, W)$ und $g \in \mathcal{L}(W, Y)$, dann gilt $g \circ f \in \mathcal{L}(V, Y)$. Sind V, W und Y endlichdimensional mit entsprechenden Basen $B_1 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$, $B_2 = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ und $B_3 = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_s\}$, so gilt

$$[g \circ f]_{B_1,B_3} \;=\; [g]_{B_2,B_3}\,[f]_{B_1,B_2}\,.$$

Beweis. Sei $h := g \circ f$. Wir zeigen zunächst, dass $h \in \mathcal{L}(V, Y)$ ist. Für $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt $h(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = g(f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})) = g(\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})) = \lambda g(f(\vec{u})) + \mu g(f(\vec{v})) \;=\; \lambda h(\vec{u}) + \mu h(\vec{v})$.

Matrizenmultiplikation entspricht Komposition

Hauptsatz. Seien V, W und Y drei K-Vektorräume. Sind $f \in \mathcal{L}(V, W)$ und $g \in \mathcal{L}(W, Y)$, dann gilt $g \circ f \in \mathcal{L}(V, Y)$. Sind V, W und Y endlichdimensional mit entsprechenden Basen $B_1 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$, $B_2 = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ und $B_3 = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_s\}$, so gilt

$$[g \circ f]_{B_1,B_3} \;=\; [g]_{B_2,B_3}\,[f]_{B_1,B_2}\,.$$

Beweis. Sei $h := g \circ f$. Wir zeigen zunächst, dass $h \in \mathcal{L}(V, Y)$ ist. Für $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt $h(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = g(f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})) = g(\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})) = \lambda g(f(\vec{u})) + \mu g(f(\vec{v})) \;=\; \lambda h(\vec{u}) + \mu h(\vec{v})$.

Sind $[f]_{B_1,B_2} = [f_{ij}]$ und $[g]_{B_2,B_3} = [g_{ij}]$, dann gilt für $j = 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned} h(\vec{v}_j) &= g(f(\vec{v}_j)) \;=\; g\left(\sum_{k=1}^{n} f_{kj}\vec{w}_k\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f_{kj}\, g(\vec{w}_k) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f_{kj} \sum_{i=1}^{s} g_{ik}\vec{y}_i \\ &= \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{n} f_{kj} g_{ik}\right)\vec{y}_i \;=\; \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} g_{ik} f_{kj}\right)}_{=:\, h_{ij}} \vec{y}_i\,. \end{aligned}$$

Matrizenmultiplikation entspricht Komposition

Hauptsatz. Seien V, W und Y drei K-Vektorräume. Sind $f \in \mathcal{L}(V, W)$ und $g \in \mathcal{L}(W, Y)$, dann gilt $g \circ f \in \mathcal{L}(V, Y)$. Sind V, W und Y endlichdimensional mit entsprechenden Basen $B_1 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$, $B_2 = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ und $B_3 = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_s\}$, so gilt

$$[g \circ f]_{B_1, B_3} \;=\; [g]_{B_2, B_3}\,[f]_{B_1, B_2}\,.$$

Beweis. Sei $h := g \circ f$. Wir zeigen zunächst, dass $h \in \mathcal{L}(V, Y)$ ist. Für $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt $h(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = g(f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})) = g(\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})) = \lambda g(f(\vec{u})) + \mu g(f(\vec{v})) \;=\; \lambda h(\vec{u}) + \mu h(\vec{v})$.

Sind $[f]_{B_1, B_2} = [f_{ij}]$ und $[g]_{B_2, B_3} = [g_{ij}]$, dann gilt für $j = 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned} h(\vec{v}_j) &= g(f(\vec{v}_j)) = g\left(\sum_{k=1}^{n} f_{kj}\vec{w}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f_{kj}\, g(\vec{w}_k) = \sum_{k=1}^{n} f_{kj} \sum_{i=1}^{s} g_{ik}\vec{y}_i \\ &= \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{n} f_{kj} g_{ik}\right)\vec{y}_i = \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} g_{ik} f_{kj}\right)}_{=:\, h_{ij}} \vec{y}_i. \end{aligned}$$

Also gilt $[h]_{B_1, B_3} = [h_{ij}] = [g_{ij}]\,[f_{ij}] = [g]_{B_2, B_3}\,[f]_{B_1, B_2}$, wie behauptet.