Mathematische Strukturen

Lineare Algebra I

Kapitel 3

16. April 2013

Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt (benannt nach René Descartes) von n Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist

$$M_1 \times \cdots \times M_n \ := \ \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in M_i \ \text{ für } \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt (benannt nach René Descartes) von n Mengen $M_1, \dots, M_n$ ist

$$M_1 \times \cdots \times M_n \ := \ \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in M_i \ \text{ für } \ i = 1, \dots, n\}.$$

Für das n-fache kartesische Produkt einer Menge M benutzen wir auch die Notation M^n:

$$M^n \ := \ \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n-mal} \ = \ \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in M \ \text{ für } \ i = 1, \dots, n\}.$$

Ein Element $(x, y) \in M \times N$ bezeichnen wir auch als ein (geordnetes) Paar und ein Element $(x_1, \dots, x_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n$ wird oft (geordnetes) n-Tupel genannt.

Relationen

Sind M, N Mengen, dann heißt eine Menge $R \subseteq M \times N$ eine Relation zwischen M und N. Ist $M = N$, so nennen wir R eine Relation auf M. Für $(x, y) \in R$ schreiben wir auch $x \sim_R y$ oder $x \sim y$, wenn klar ist um welche Relation es sich handelt.

Relationen

Sind M, N Mengen, dann heißt eine Menge $R \subseteq M \times N$ eine Relation zwischen M und N. Ist $M = N$, so nennen wir R eine Relation auf M. Für $(x, y) \in R$ schreiben wir auch $x \sim_R y$ oder $x \sim y$, wenn klar ist um welche Relation es sich handelt.

Ist (mindestens) eine der Mengen M und N leer, so ist jede Relation zwischen M und N ebenfalls die leere Menge.

Relationen

Sind M, N Mengen, dann heißt eine Menge $R \subseteq M \times N$ eine Relation zwischen M und N. Ist $M = N$, so nennen wir R eine Relation auf M. Für $(x, y) \in R$ schreiben wir auch $x \sim_R y$ oder $x \sim y$, wenn klar ist um welche Relation es sich handelt.

Ist (mindestens) eine der Mengen M und N leer, so ist jede Relation zwischen M und N ebenfalls die leere Menge.

Beispiel. $M = \mathbb{N}$ und $N = \mathbb{Q}$, dann ist

$$R = \{(x, y) \in M \times N \mid xy = 1\}$$

eine Relation zwischen M und N, die auch wie folgt angegeben werden kann:

$$R = \{(1, 1), (2, 1/2), (3, 1/3), \dots\} = \{(n, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Eigenschaften von Relationen.

Sei M eine Menge. Eine Relation R auf M heißt

(1) reflexiv, falls für alle $x \in M$ gilt: $x \sim x$,

Eigenschaften von Relationen.

Sei M eine Menge. Eine Relation R auf M heißt

(1) reflexiv, falls für alle $x \in M$ gilt: $x \sim x$,

(2) symmetrisch, falls für alle $x, y \in M$ gilt: $(x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$,

Eigenschaften von Relationen.

Sei M eine Menge. Eine Relation R auf M heißt

(1) reflexiv, falls für alle $x \in M$ gilt: $x \sim x$,

(2) symmetrisch, falls für alle $x, y \in M$ gilt: $(x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$,

(3) transitiv, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt: $(x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$.

Eigenschaften von Relationen.

Sei M eine Menge. Eine Relation R auf M heißt

(1) reflexiv, falls für alle $x \in M$ gilt: $x \sim x$,

(2) symmetrisch, falls für alle $x, y \in M$ gilt: $(x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$,

(3) transitiv, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt: $(x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$.

Falls R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, so nennen wir R eine Äquivalenzrelation auf M.

Eigenschaften von Relationen.

Sei M eine Menge. Eine Relation R auf M heißt

(1) reflexiv, falls für alle $x \in M$ gilt: $x \sim x$,

(2) symmetrisch, falls für alle $x, y \in M$ gilt: $(x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$,

(3) transitiv, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt: $(x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$.

Falls R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, so nennen wir R eine Äquivalenzrelation auf M.

Wichtiges Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, dann ist die Menge

$$R_n := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b \text{ ist ohne Rest durch } n \text{ teilbar}\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. Warum?

Eigenschaften von Relationen.

Sei M eine Menge. Eine Relation R auf M heißt

(1) reflexiv, falls für alle $x \in M$ gilt: $x \sim x$,

(2) symmetrisch, falls für alle $x, y \in M$ gilt: $(x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$,

(3) transitiv, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt: $(x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$.

Falls R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, so nennen wir R eine Äquivalenzrelation auf M.

Wichtiges Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, dann ist die Menge

$$R_n := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b \text{ ist ohne Rest durch } n \text{ teilbar}\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. Warum?

Reflexivität: $a - a = 0$ ist ohne Rest durch n teilbar.

Eigenschaften von Relationen.

Sei M eine Menge. Eine Relation R auf M heißt

(1) reflexiv, falls für alle $x \in M$ gilt: $x \sim x$,

(2) symmetrisch, falls für alle $x, y \in M$ gilt: $(x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$,

(3) transitiv, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt: $(x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$.

Falls R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, so nennen wir R eine Äquivalenzrelation auf M.

Wichtiges Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, dann ist die Menge

$$R_n := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b \text{ ist ohne Rest durch } n \text{ teilbar}\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. Warum?

Reflexivität: $a - a = 0$ ist ohne Rest durch n teilbar.

Symmetrie: Falls $a - b$ ohne Rest durch n teilbar ist, so gilt dies auch für $b - a$.

Eigenschaften von Relationen.

Sei M eine Menge. Eine Relation R auf M heißt

(1) reflexiv, falls für alle $x \in M$ gilt: $x \sim x$,

(2) symmetrisch, falls für alle $x, y \in M$ gilt: $(x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$,

(3) transitiv, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt: $(x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$.

Falls R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, so nennen wir R eine Äquivalenzrelation auf M.

Wichtiges Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, dann ist die Menge

$$R_n := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b \text{ ist ohne Rest durch } n \text{ teilbar}\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. Warum?

Reflexivität: $a - a = 0$ ist ohne Rest durch n teilbar.

Symmetrie: Falls $a - b$ ohne Rest durch n teilbar ist, so gilt dies auch für $b - a$.

Transitivität: Seien $a - b$ und $b - c$ ohne Rest durch n teilbar, dann gilt $a - c = (a - b) + (b - c)$. Beide Summanden auf der rechten Seite sind ohne Rest durch n teilbar, daher gilt dies auch für $a - c$.

Äquivalenzklassen

Sei R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M. Dann heißt für $x \in M$ die Menge

$$[x]_R := \{y \in M \mid (x, y) \in R\} = \{y \in M \mid x \sim y\}$$

die Äquivalenzklasse von x (bezüglich R).

Äquivalenzklassen

Sei R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M. Dann heißt für $x \in M$ die Menge

$$[x]_R := \{y \in M \mid (x, y) \in R\} = \{y \in M \mid x \sim y\}$$

die Äquivalenzklasse von x (bezüglich R).

Die Äquivalenzklasse $[x]_R$ eines Elements $x \in M$ ist niemals die leere Menge, denn es gilt stets $x \sim x$ (Reflexivität) und somit $x \in [x]_R$. Wenn klar ist, um welche Äquivalenzrelation R es sich handelt, schreiben wir oft lediglich $[x]$ anstatt $[x]_R$.

Äquivalenzklassen

Sei R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M. Dann heißt für $x \in M$ die Menge

$$[x]_R := \{y \in M \mid (x, y) \in R\} = \{y \in M \mid x \sim y\}$$

die Äquivalenzklasse von x (bezüglich R).

Die Äquivalenzklasse $[x]_R$ eines Elements $x \in M$ ist niemals die leere Menge, denn es gilt stets $x \sim x$ (Reflexivität) und somit $x \in [x]_R$. Wenn klar ist, um welche Äquivalenzrelation R es sich handelt, schreiben wir oft lediglich $[x]$ anstatt $[x]_R$.

Theorem. Sei R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M und seien $x, y \in M$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $[x] = [y]$.

(2) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

(3) $x \sim y$.

Theorem. Sei R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M und seien $x, y \in M$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $[x] = [y]$.

(2) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

(3) $x \sim y$.

Beweis.
$(1) \Rightarrow (2)$: Wegen $x \sim x$ ist $x \in [x]$. Aus $[x] = [y]$ folgt dann $x \in [y]$ und somit $x \in [x] \cap [y]$.

Theorem. Sei R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M und seien $x, y \in M$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $[x] = [y]$.

(2) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

(3) $x \sim y$.

Beweis.
$(1) \Rightarrow (2)$: Wegen $x \sim x$ ist $x \in [x]$. Aus $[x] = [y]$ folgt dann $x \in [y]$ und somit $x \in [x] \cap [y]$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Wegen $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, gibt es ein $z \in [x] \cap [y]$. Für dieses gilt $x \sim z$ und $y \sim z$, also $x \sim z$ und $z \sim y$ (Symmetrie) und somit $x \sim y$ (Transitivität).

Theorem. Sei R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M und seien $x, y \in M$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $[x] = [y]$.

(2) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

(3) $x \sim y$.

Beweis.

$(1) \Rightarrow (2)$: Wegen $x \sim x$ ist $x \in [x]$. Aus $[x] = [y]$ folgt dann $x \in [y]$ und somit $x \in [x] \cap [y]$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Wegen $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, gibt es ein $z \in [x] \cap [y]$. Für dieses gilt $x \sim z$ und $y \sim z$, also $x \sim z$ und $z \sim y$ (Symmetrie) und somit $x \sim y$ (Transitivität).

$(3) \Rightarrow (1)$: Sei $x \sim y$ und sei $z \in [x]$, d.h. $x \sim z$. Aus $x \sim y$ folgt nun mit Hilfe der Transitivität und Symmetrie, dass $y \sim z$, also $z \in [y]$. Das heißt, es gilt $[x] \subseteq [y]$. Genauso zeigt man $[y] \subseteq [x]$, so dass $[x] = [y]$ folgt.

Zurück zu unserem Beispiel.

Fakt. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, dann ist die Menge

$$R_n := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b \text{ ist ohne Rest durch } n \text{ teilbar}\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Zurück zu unserem Beispiel.

Fakt. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, dann ist die Menge

$$R_n := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b \text{ ist ohne Rest durch } n \text{ teilbar}\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Für $a \in \mathbb{Z}$ heißt die Äquivalenzklasse $[a]$ bzgl. der Relation R_n die Restklasse von a modulo n.

Zurück zu unserem Beispiel.

Fakt. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, dann ist die Menge

$$R_n := \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b \text{ ist ohne Rest durch } n \text{ teilbar}\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Für $a \in \mathbb{Z}$ heißt die Äquivalenzklasse $[a]$ bzgl. der Relation R_n die Restklasse von a modulo n. Wie man leicht sieht ist $[a] = a + n\mathbb{Z} := \{a + nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Die Äquivalenzrelation R_n liefert uns eine Zerlegung der Menge $\mathbb{Z}$ in n disjunkte Teilmengen.

Zurück zu unserem Beispiel.

Fakt. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, dann ist die Menge

$$R_n := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b \text{ ist ohne Rest durch } n \text{ teilbar}\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Für $a \in \mathbb{Z}$ heißt die Äquivalenzklasse $[a]$ bzgl. der Relation R_n die Restklasse von a modulo n. Wie man leicht sieht ist $[a] = a + n\mathbb{Z} := \{a + nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Die Äquivalenzrelation R_n liefert uns eine Zerlegung der Menge $\mathbb{Z}$ in n disjunkte Teilmengen. Insbesondere gilt

$$[0] \cup [1] \cup \cdots \cup [n-1] \;=\; \bigcup_{a=0}^{n-1} [a] \;=\; \mathbb{Z}.$$

Die Menge aller Restklassen modulo n bezeichnet man häufig mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, also $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$. Diese Menge spielt im mathematischen Teilgebiet der Zahlentheorie eine wichtige Rolle.