Matrizen

Lineare Algebra I

17. April 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/~holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004 (ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Matrizen.

Sei $\{R, +, \cdot\}$ ein kommutativer Ring mit Eins-Element und $n, m \in \mathbb{N}$. Ein Feld

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

mit $a_{ij} \in R$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, heißt $n \times m$-Matrix mit Koeffizienten in R oder ($n \times m$-) Matrix über R.

Matrizen.

Sei $\{R, +, \cdot\}$ ein kommutativer Ring mit Eins-Element und $n, m \in \mathbb{N}$. Ein Feld

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

mit $a_{ij} \in R$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, heißt $n \times m$-Matrix mit Koeffizienten in R oder ($n \times m$-) Matrix über R.

- $R^{n,m}$: Menge aller $n \times m$-Matrizen über R,
- a_{ij} : der i, j-te Koeffizient oder Eintrag,
- $[a_{i1}, \ldots, a_{im}]$: die i-te Zeile von A (das ist eine $1 \times m$-Matrix),
- $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$: die j-te Spalte von A (das ist eine $n \times 1$-Matrix).

Weitere Bezeichnungen.

- $0_{n,m}$ oder 0 : die Nullmatrix, d.h., die Matrix in $R^{n,m}$, bei der alle Einträge 0 sind,

Weitere Bezeichnungen.

- $0_{n,m}$ oder 0 : die Nullmatrix, d.h., die Matrix in $R^{n,m}$, bei der alle Einträge 0 sind,
- I_n oder I : die Einheitsmatrix in $R^{n,n}$, d.h., die Matrix mit den Einträgen

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Weitere Bezeichnungen.

- $0_{n,m}$ oder 0 : die Nullmatrix, d.h., die Matrix in $R^{n,m}$, bei der alle Einträge 0 sind,
- I_n oder I : die Einheitsmatrix in $R^{n,n}$, d.h., die Matrix mit den Einträgen

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

- E_{ij} : die Matrix in $R^{n,m}$, die in der Position (i,j) den Eintrag 1 und in allen anderen Positionen den Eintrag 0 hat, z.B.

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Operationen mit Matrizen

Addition von Matrizen

Wir können Matrizen gleicher Größe addieren. Dazu führen wir eine Operation '+' ein. Das ist eine Abbildung:

$$\begin{array}{cccll} + & : & (R^{n,m} \times R^{n,m}) & \to & R^{n,m} \\ & & (A, B) & \mapsto & A + B = C = [c_{ij}], \\ & & & & c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \;\; i = 1, \ldots, n, \;\; j = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Operationen mit Matrizen

Addition von Matrizen

Wir können Matrizen gleicher Größe addieren. Dazu führen wir eine Operation '$+$' ein. Das ist eine Abbildung:

$$\begin{array}{ccccl} + & : & (R^{n,m} \times R^{n,m}) & \to & R^{n,m} \\ & & (A, B) & \mapsto & A + B = C = [c_{ij}], \\ & & & & c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \;\; i = 1, \ldots, n, \;\; j = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Eigenschaften der Matrizenaddition

Seien $A, B, C \in R^{n,m}$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ und setze $\tilde{A} = [-a_{ij}]$. Dann gilt:

$$\begin{array}{crcl} (\text{Ass } +) & (A + B) + C & = & A + (B + C), \\ (\text{Komm } +) & A + B & = & B + A, \\ (\text{Null}) & A + 0 & = & 0 + A \;=\; A, \\ (\text{Inv } +) & A + \tilde{A} & = & \tilde{A} + A \;=\; 0. \end{array}$$

Skalarmultiplikation

Wir können Matrizen mit Elementen aus R multiplizieren, d.h. wir führen eine Operation '$\cdot$' ein.

$$\begin{array}{cccc} \cdot & : & (R^{n,m} \times R) & \longrightarrow & R^{n,m} \\ & & (A, r) & \longmapsto & r \cdot A = [r \cdot a_{ij}]. \end{array}$$

Skalarmultiplikation

Wir können Matrizen mit Elementen aus R multiplizieren, d.h. wir führen eine Operation '$\cdot$' ein.

$$\begin{array}{cccc} \cdot & : & (R^{n,m} \times R) & \longrightarrow & R^{n,m} \\ & & (A, r) & \longmapsto & r \cdot A = [r \cdot a_{ij}]. \end{array}$$

Eigenschaften der Skalarmultiplikation

Seien $A, B \in R^{n,m}$, $r, s \in R$. Dann gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (r \cdot s)A = r(sA), \\ \text{b)} & (r + s)A = rA + sA, \\ \text{c)} & r(A + B) = rA + rB, \\ \text{d)} & 1 \cdot A = A, \\ \text{e)} & A + (-1)A = 0, \\ \text{f)} & A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} E_{ij}. \end{array}$$

Multiplikation von Matrizen

Die wichtigere Multiplikation ist jedoch die Matrizenmultiplikation:

$$\begin{array}{cccc} \cdot & : & (R^{n,m} \times R^{m,s}) & \longrightarrow & R^{n,s} \\ & & (A, B) & \mapsto & A \cdot B = C = [c_{ij}], \end{array}$$

wobei die neue Matrix C wie folgt erzeugt wird: Für $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$, $B = [b_{ij}] \in R^{m,s}$, setze $A \cdot B = C = [c_{ij}] \in R^{n,s}$, mit $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$.

Multiplikation von Matrizen

Die wichtigere Multiplikation ist jedoch die Matrizenmultiplikation:

$$\begin{array}{rcll} \cdot & : & (R^{n,m} \times R^{m,s}) & \longrightarrow & R^{n,s} \\ & & (A, B) & \longmapsto & A \cdot B = C = [c_{ij}], \end{array}$$

wobei die neue Matrix C wie folgt erzeugt wird: Für $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$, $B = [b_{ij}] \in R^{m,s}$, setze $A \cdot B = C = [c_{ij}] \in R^{n,s}$, mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$.

Technik:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} & \dots & b_{1s} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & & \dots & b_{ms} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ [a_{i1} & \cdots & a_{im}] \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & & \\ & & \downarrow & \\ & \longrightarrow & c_{ij} & \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

Betrachte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

Betrachte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 24 & 30 & 36 \\ 36 & 45 & 54 \end{bmatrix}, \; BA = \begin{bmatrix} 14 & 14 & 14 \\ 32 & 32 & 32 \\ 50 & 50 & 50 \end{bmatrix}$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

Betrachte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 24 & 30 & 36 \\ 36 & 45 & 54 \end{bmatrix}, \ BA = \begin{bmatrix} 14 & 14 & 14 \\ 32 & 32 & 32 \\ 50 & 50 & 50 \end{bmatrix}$$

Wir sehen damit, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

Beispiel: Matrizenmultiplikation

Betrachte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 24 & 30 & 36 \\ 36 & 45 & 54 \end{bmatrix}, \; BA = \begin{bmatrix} 14 & 14 & 14 \\ 32 & 32 & 32 \\ 50 & 50 & 50 \end{bmatrix}$$

Wir sehen damit, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

Fragen: Sei $A \in R^{n,m}$. Was sind:

- $A \cdot 0_{m,m}$?

Beispiel: Matrizenmultiplikation

Betrachte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 24 & 30 & 36 \\ 36 & 45 & 54 \end{bmatrix}, \ BA = \begin{bmatrix} 14 & 14 & 14 \\ 32 & 32 & 32 \\ 50 & 50 & 50 \end{bmatrix}$$

Wir sehen damit, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

Fragen: Sei $A \in R^{n,m}$. Was sind:

- $A \cdot 0_{m,m}$?
- $0_{1,n} \cdot A$?

Beispiel: Matrizenmultiplikation

Betrachte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 24 & 30 & 36 \\ 36 & 45 & 54 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 14 & 14 & 14 \\ 32 & 32 & 32 \\ 50 & 50 & 50 \end{bmatrix}$$

Wir sehen damit, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

Fragen: Sei $A \in R^{n,m}$. Was sind:

- $A \cdot 0_{m,m}$?
- $0_{1,n} \cdot A$?
- $A \cdot I_m$?
- $I_n \cdot A$?

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Seien $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$, $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] \in R^{n,m}$, $B = [b_{ij}] \in R^{m,s}$, $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}] \in R^{m,s}$, $C = [c_{ij}] \in R^{s,t}$, $r \in R$. Dann gilt:

a)	(Ass $\cdot$)	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
b)	(Distr 1)	$(A + \tilde{A})B = AB + \tilde{A}B$,
c)	(Distr 2)	$A(B + \tilde{B}) = AB + A\tilde{B}$,
d)	(I_n, I_m)	$I_nA = AI_m = A$,
e)		$(r \cdot A)B = r(AB) = A(rB)$.

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Seien $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$, $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] \in R^{n,m}$, $B = [b_{ij}] \in R^{m,s}$, $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}] \in R^{m,s}$, $C = [c_{ij}] \in R^{s,t}$, $r \in R$. Dann gilt:

a)	(Ass $\cdot$)	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
b)	(Distr 1)	$(A + \tilde{A})B = AB + \tilde{A}B$,
c)	(Distr 2)	$A(B + \tilde{B}) = AB + A\tilde{B}$,
d)	(I_n, I_m)	$I_n A = A I_m = A$,
e)		$(r \cdot A)B = r(AB) = A(rB)$.

Beweis: a) Sei $D = [d_{ij}] = (A \cdot B) \cdot C$, $\tilde{D} = [\tilde{d}_{ij}] = A \cdot (B \cdot C)$. Es gilt

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{m} (a_{ik}\, b_{kl})\, c_{lj}$$

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Seien $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$, $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] \in R^{n,m}$, $B = [b_{ij}] \in R^{m,s}$, $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}] \in R^{m,s}$, $C = [c_{ij}] \in R^{s,t}$, $r \in R$. Dann gilt:

a)	(Ass $\cdot$)	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
b)	(Distr 1)	$(A + \tilde{A})B = AB + \tilde{A}B$,
c)	(Distr 2)	$A(B + \tilde{B}) = AB + A\tilde{B}$,
d)	(I_n, I_m)	$I_n A = A I_m = A$,
e)		$(r \cdot A)B = r(AB) = A(rB)$.

Beweis: a) Sei $D = [d_{ij}] = (A \cdot B) \cdot C$, $\tilde{D} = [\tilde{d}_{ij}] = A \cdot (B \cdot C)$. Es gilt

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{m} (a_{ik}\, b_{kl})\, c_{lj}$$

! Distributivität in R

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Seien $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$, $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] \in R^{n,m}$, $B = [b_{ij}] \in R^{m,s}$, $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}] \in R^{m,s}$, $C = [c_{ij}] \in R^{s,t}$, $r \in R$. Dann gilt:

a)	(Ass $\cdot$)	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
b)	(Distr 1)	$(A + \tilde{A})B = AB + \tilde{A}B$,
c)	(Distr 2)	$A(B + \tilde{B}) = AB + A\tilde{B}$,
d)	(I_n, I_m)	$I_n A = A I_m = A$,
e)		$(r \cdot A)B = r(AB) = A(rB)$.

Beweis: a) Sei $D = [d_{ij}] = (A \cdot B) \cdot C$, $\tilde{D} = [\tilde{d}_{ij}] = A \cdot (B \cdot C)$. Es gilt

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{m} (a_{ik}\, b_{kl})\, c_{lj} \\ & \qquad\qquad \textcolor{red}{! \text{ Distributivität in } R} \\ &= \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, (b_{kl}\, c_{lj}) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{s} b_{kl}\, c_{lj} \right) \\ &= \tilde{d}_{ij}. \end{aligned}$$

b)-e) Übung!

Transponierte Matrix

Sei $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$. Dann heißt die Matrix $B = [b_{ij}] \in R^{m,n}$ mit $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, transponierte Matrix zu A. Wir schreiben $B = A^T$.

Transponierte Matrix

Sei $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$. Dann heißt die Matrix $B = [b_{ij}] \in R^{m,n}$ mit $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, transponierte Matrix zu A. Wir schreiben $B = A^T$.

Beispiele:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

Transponierte Matrix

Sei $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$. Dann heißt die Matrix $B = [b_{ij}] \in R^{m,n}$ mit $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, transponierte Matrix zu A. Wir schreiben $B = A^T$.

Beispiele:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Transponierte Matrix

Sei $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$. Dann heißt die Matrix $B = [b_{ij}] \in R^{m,n}$ mit $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, transponierte Matrix zu A. Wir schreiben $B = A^T$.

Beispiele:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

Transponierte Matrix

Sei $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$. Dann heißt die Matrix $B = [b_{ij}] \in R^{m,n}$ mit $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, transponierte Matrix zu A. Wir schreiben $B = A^T$.

Beispiele:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A^T = A.$$

Eigenschaften der Transponierten

Lemma. Seien $A, \tilde{A} \in R^{n,m}$, $B \in R^{m,s}$, $r \in R$. Dann gilt

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (A+\tilde{A})^T = A^T + \tilde{A}^T, \\ \text{b)} & (rA)^T = rA^T, \\ \text{c)} & (AB)^T = B^T A^T, \\ \text{d)} & (A^T)^T = A. \end{array}$$

Eigenschaften der Transponierten

Lemma. Seien $A, \tilde{A} \in R^{n,m}$, $B \in R^{m,s}$, $r \in R$. Dann gilt

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (A+\tilde{A})^T = A^T + \tilde{A}^T, \\ \text{b)} & (rA)^T = rA^T, \\ \text{c)} & (AB)^T = B^T A^T, \\ \text{d)} & (A^T)^T = A. \end{array}$$

Beweis. a), b), d) sind offensichtlich.

c) Sei $A \cdot B = C = [c_{ij}]$ mit $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj}$ und $A^T = [a'_{ij}]$, $B^T = [b'_{ij}]$, $C^T = [c'_{ij}]$. Es gilt

$$c'_{ij} = c_{ji} \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\, b_{ki} \;=\; \sum_{k=1}^{m} a'_{kj}\, b'_{ik} \;=\; \sum_{k=1}^{m} b'_{ik}\, a'_{kj}.$$

und damit $C^T = B^T A^T$.

Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) A heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) A heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) A heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle} \quad i = 2, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, i-1.$

Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) A heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) A heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle} \; i = 2, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, i-1.$

c) A heißt untere Dreiecksmatrix, falls A^T obere Dreiecksmatrix ist.

Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) A heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) A heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0 \quad$ für alle $\; i = 2, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, i-1.$

c) A heißt untere Dreiecksmatrix, falls A^T obere Dreiecksmatrix ist.

d) A heißt Diagonalmatrix, falls A obere und untere Dreiecksmatrix ist.

Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) A heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) A heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle} \;\; i = 2, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, i-1.$

c) A heißt untere Dreiecksmatrix, falls A^T obere Dreiecksmatrix ist.

d) A heißt Diagonalmatrix, falls A obere und untere Dreiecksmatrix ist.

e) A heißt Permutationsmatrix, falls in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Eintrag 1 ist und alle anderen Einträge 0 sind.

Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) A heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) A heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle} \quad i = 2, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, i-1.$

c) A heißt untere Dreiecksmatrix, falls A^T obere Dreiecksmatrix ist.

d) A heißt Diagonalmatrix, falls A obere und untere Dreiecksmatrix ist.

e) A heißt Permutationsmatrix, falls in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Eintrag 1 ist und alle anderen Einträge 0 sind.

Beispiele:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$