# Eigenschaften der Matrizenmultiplikation. Transponierung. Spezielle Matrizen.

Lineare Algebra I

Kapitel 4

23. April 2013

## Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/~holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

# Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Seien $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$, $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] \in R^{n,m}$, $B = [b_{ij}] \in R^{m,s}$, $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}] \in R^{m,s}$, $C = [c_{ij}] \in R^{s,t}$, $r \in R$. Dann gilt:

| | | |
|---|---|---|
| a) | (Ass $\cdot$) | $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, |
| b) | (Distr 1) | $(A + \tilde{A})B = AB + \tilde{A}B$, |
| c) | (Distr 2) | $A(B + \tilde{B}) = AB + A\tilde{B}$, |
| d) | ($I_n, I_m$) | $I_n A = A I_m = A$, |
| e) | | $(r \cdot A)B = r(AB) = A(rB)$. |

# Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Seien $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$, $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] \in R^{n,m}$, $B = [b_{ij}] \in R^{m,s}$, $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}] \in R^{m,s}$, $C = [c_{ij}] \in R^{s,t}$, $r \in R$. Dann gilt:

| | | |
|---|---|---|
| a) | (Ass $\cdot$) | $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, |
| b) | (Distr 1) | $(A + \tilde{A})B = AB + \tilde{A}B$, |
| c) | (Distr 2) | $A(B + \tilde{B}) = AB + A\tilde{B}$, |
| d) | $(I_n, I_m)$ | $I_n A = A I_m = A$, |
| e) | | $(r \cdot A)B = r(AB) = A(rB)$. |

**Beweis:** a) Sei $D = [d_{ij}] = (A \cdot B) \cdot C$, $\tilde{D} = [\tilde{d}_{ij}] = A \cdot (B \cdot C)$. Es gilt

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^{s} \left( \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{m} (a_{ik}\, b_{kl})\, c_{lj}$$

# Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Seien $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$, $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] \in R^{n,m}$, $B = [b_{ij}] \in R^{m,s}$, $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}] \in R^{m,s}$, $C = [c_{ij}] \in R^{s,t}$, $r \in R$. Dann gilt:

| | | |
|---|---|---|
| a) | (Ass $\cdot$) | $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, |
| b) | (Distr 1) | $(A + \tilde{A})B = AB + \tilde{A}B$, |
| c) | (Distr 2) | $A(B + \tilde{B}) = AB + A\tilde{B}$, |
| d) | $(I_n, I_m)$ | $I_n A = A I_m = A$, |
| e) | | $(r \cdot A)B = r(AB) = A(rB)$. |

**Beweis:** a) Sei $D = [d_{ij}] = (A \cdot B) \cdot C$, $\tilde{D} = [\tilde{d}_{ij}] = A \cdot (B \cdot C)$. Es gilt

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^{s} \left( \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{m} (a_{ik}\, b_{kl})\, c_{lj}$$

! Distributivität in $R$

# Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Seien $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$, $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] \in R^{n,m}$, $B = [b_{ij}] \in R^{m,s}$, $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}] \in R^{m,s}$, $C = [c_{ij}] \in R^{s,t}$, $r \in R$. Dann gilt:

| | | |
|---|---|---|
| a) | (Ass $\cdot$) | $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, |
| b) | (Distr 1) | $(A + \tilde{A})B = AB + \tilde{A}B$, |
| c) | (Distr 2) | $A(B + \tilde{B}) = AB + A\tilde{B}$, |
| d) | $(I_n, I_m)$ | $I_n A = A I_m = A$, |
| e) | | $(r \cdot A)B = r(AB) = A(rB)$. |

**Beweis:** a) Sei $D = [d_{ij}] = (A \cdot B) \cdot C$, $\tilde{D} = [\tilde{d}_{ij}] = A \cdot (B \cdot C)$. Es gilt

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{l=1}^{s} \left( \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{m} (a_{ik}\, b_{kl})\, c_{lj} \\ &\qquad\qquad \text{! Distributivität in } R \\ &= \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, (b_{kl}\, c_{lj}) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \left( \sum_{l=1}^{s} b_{kl}\, c_{lj} \right) \\ &= \tilde{d}_{ij}. \end{aligned}$$

b)-e) Übung!

# Matrizenmultiplikation und Block-Struktur

**NB:** Matrizenmultiplikation respektiert Block-Struktur von Matrizen: z.B.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \\ C_{41} & C_{42} \end{bmatrix}$$

wo $A_{ik}$, $B_{kj}$, $C_{ij}$ Blockmatrizen der richtigen Grösse sind. D.h., alle Blöcke in einer Zeile müssen die gleiche Anzahl von Zeilen haben und alle Blöcke in einer Spalte die gleiche Anzahl von Spalten. Dazu müssen immer die Anzahl von Spalten von $A_{ik}$ und die Anzahl von Spalten von $B_{kj}$ übereinstimmen. Dann gilt

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{3} A_{ik} B_{kj} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + A_{13} B_{3j}$$

für alle $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2$.

Aufgabe: mit konkreten Zahlen ausprobieren!

# Transponierte Matrix

Sei $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$. Dann heißt die Matrix $B = [b_{ij}] \in R^{m,n}$ mit $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, transponierte Matrix zu $A$. Wir schreiben $B = A^T$.

# Transponierte Matrix

Sei $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$. Dann heißt die Matrix $B = [b_{ij}] \in R^{m,n}$ mit $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, transponierte Matrix zu $A$. Wir schreiben $B = A^T$.

**Beispiele:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

# Transponierte Matrix

Sei $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$. Dann heißt die Matrix $B = [b_{ij}] \in R^{m,n}$ mit $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, transponierte Matrix zu $A$. Wir schreiben $B = A^T$.

**Beispiele:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

# Transponierte Matrix

Sei $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$. Dann heißt die Matrix $B = [b_{ij}] \in R^{m,n}$ mit $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, transponierte Matrix zu $A$. Wir schreiben $B = A^T$.

**Beispiele:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

# Transponierte Matrix

Sei $A = [a_{ij}] \in R^{n,m}$. Dann heißt die Matrix $B = [b_{ij}] \in R^{m,n}$ mit $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, transponierte Matrix zu $A$. Wir schreiben $B = A^T$.

**Beispiele:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A^T = A.$$

# Eigenschaften der Transponierten

Lemma. Seien $A, \tilde{A} \in R^{n,m}$, $B \in R^{m,s}$, $r \in R$. Dann gilt

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (A + \tilde{A})^T = A^T + \tilde{A}^T, \\ \text{b)} & (rA)^T = rA^T, \\ \text{c)} & (AB)^T = B^T A^T, \\ \text{d)} & (A^T)^T = A. \end{array}$$

# Eigenschaften der Transponierten

Lemma. Seien $A, \tilde{A} \in R^{n,m}$, $B \in R^{m,s}$, $r \in R$. Dann gilt

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (A+\tilde{A})^T = A^T + \tilde{A}^T, \\ \text{b)} & (rA)^T = rA^T, \\ \text{c)} & (AB)^T = B^T A^T, \\ \text{d)} & (A^T)^T = A. \end{array}$$

**Beweis.** a), b), d) sind offensichtlich.

c) Sei $A \cdot B = C = [c_{ij}]$ mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj}$ und $A^T = [a'_{ij}]$, $B^T = [b'_{ij}]$, $C^T = [c'_{ij}]$. Es gilt

$$c'_{ij} = c_{ji} \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\, b_{ki} \; = \sum_{k=1}^{m} a'_{kj}\, b'_{ik} \; = \sum_{k=1}^{m} b'_{ik}\, a'_{kj}.$$

und damit $C^T = B^T A^T$.

# Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) $A$ heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

# Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) $A$ heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) $A$ heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle} \quad i = 2, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, i-1.$

# Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) $A$ heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) $A$ heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle} \quad i = 2, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, i-1.$

c) $A$ heißt untere Dreiecksmatrix, falls $A^T$ obere Dreiecksmatrix ist.

# Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) $A$ heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) $A$ heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle} \quad i = 2, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, i-1.$

c) $A$ heißt untere Dreiecksmatrix, falls $A^T$ obere Dreiecksmatrix ist.

d) $A$ heißt Diagonalmatrix, falls $A$ obere und untere Dreiecksmatrix ist.

# Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) $A$ heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) $A$ heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle} \;\; i = 2, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, i-1.$

c) $A$ heißt untere Dreiecksmatrix, falls $A^T$ obere Dreiecksmatrix ist.

d) $A$ heißt Diagonalmatrix, falls $A$ obere und untere Dreiecksmatrix ist.

e) $A$ heißt Permutationsmatrix, falls in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Eintrag 1 ist und alle anderen Einträge 0 sind.

# Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) $A$ heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) $A$ heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0$ für alle $i = 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, i-1$.

c) $A$ heißt untere Dreiecksmatrix, falls $A^T$ obere Dreiecksmatrix ist.

d) $A$ heißt Diagonalmatrix, falls $A$ obere und untere Dreiecksmatrix ist.

e) $A$ heißt Permutationsmatrix, falls in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Eintrag 1 ist und alle anderen Einträge 0 sind.

**Beispiele:**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$