Invertierbarkeit von Matrizen

Lineare Algebra I

Kapitel 4

24. April 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/˜holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Invertierbarkeit von Matrizen

Definition

Eine Matrix $A \in R^{n,n}$ heißt invertierbar, wenn es ein $\tilde{A} \in R^{n,n}$ gibt mit $\tilde{A}A(= A\tilde{A}) = I_n$. Man schreibt dann $\tilde{A} = A^{-1}$, und nennt $\tilde{A}$ die inverse Matrix zu A.

Invertierbarkeit von Matrizen

Definition

Eine Matrix $A \in R^{n,n}$ heißt invertierbar, wenn es ein $\tilde{A} \in R^{n,n}$ gibt mit $\tilde{A}A (= A\tilde{A}) = I_n$. Man schreibt dann $\tilde{A} = A^{-1}$, und nennt $\tilde{A}$ die inverse Matrix zu A.

Beachte, obwohl die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist vertauscht eine invertierbare Matrix $A \in R^{n,n}$ mit ihrer Inversen!

Invertierbarkeit von Matrizen

Definition

Eine Matrix $A \in R^{n,n}$ heißt invertierbar, wenn es ein $\tilde{A} \in R^{n,n}$ gibt mit $\tilde{A}A (= A\tilde{A}) = I_n$. Man schreibt dann $\tilde{A} = A^{-1}$, und nennt $\tilde{A}$ die inverse Matrix zu A.

Beachte, obwohl die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist vertauscht eine invertierbare Matrix $A \in R^{n,n}$ mit ihrer Inversen!

Lemma

Seien $A, B \in R^{n,n}$ invertierbar. Dann ist AB invertierbar und es gilt

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Invertierbarkeit von Matrizen

Definition

Eine Matrix $A \in R^{n,n}$ heißt invertierbar, wenn es ein $\tilde{A} \in R^{n,n}$ gibt mit $\tilde{A}A (= A\tilde{A}) = I_n$. Man schreibt dann $\tilde{A} = A^{-1}$, und nennt $\tilde{A}$ die inverse Matrix zu A.

Beachte, obwohl die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist vertauscht eine invertierbare Matrix $A \in R^{n,n}$ mit ihrer Inversen!

Lemma

Seien $A, B \in R^{n,n}$ invertierbar. Dann ist AB invertierbar und es gilt

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,\\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n\end{aligned}$$

und damit folgt die Behauptung.

Die Gruppe GL_n

Frage: ist jede quadratische Matrix invertierbar?

Die Gruppe GL_n

Frage: ist jede quadratische Matrix invertierbar? Gar nicht.
Beispiele:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Die Gruppe GL_n

Frage: ist jede quadratische Matrix invertierbar? Gar nicht.
Beispiele:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Theorem

Die Menge der invertierbaren Matrizen in $R^{n,n}$ ist bezüglich der Matrizenmultiplikation eine (nicht kommutative) Gruppe. Wir bezeichnen diese Menge mit $GL_n(R)$ (General Linear group).

Beweis: Die Assoziativität und die Abgeschlossenheit dieser Menge (unter Multiplikation) haben wir bereits gezeigt. Das Einselement ist durch die Einheitsmatrix I_n gegeben und die Existenz von multiplikativen Inversen gilt per Definition.

Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) A heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) A heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) A heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0 \quad$ für alle $\; i = 2, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, i-1$.

Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) A heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) A heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0 \quad$ für alle $\; i = 2, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, i-1.$

c) A heißt untere Dreiecksmatrix, falls A^T obere Dreiecksmatrix ist.

Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) A heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) A heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0 \quad$ für alle $\; i = 2, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, i-1.$

c) A heißt untere Dreiecksmatrix, falls A^T obere Dreiecksmatrix ist.

d) A heißt Diagonalmatrix, falls A obere und untere Dreiecksmatrix ist.

Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) A heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) A heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle } \; i = 2, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, i-1.$

c) A heißt untere Dreiecksmatrix, falls A^T obere Dreiecksmatrix ist.

d) A heißt Diagonalmatrix, falls A obere und untere Dreiecksmatrix ist.

e) A heißt Permutationsmatrix, falls in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Eintrag 1 ist und alle anderen Einträge 0 sind.

Spezielle Klassen von quadratischen Matrizen

Sei $A \in R^{n,n}$.

a) A heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.

b) A heißt obere Dreiecksmatrix, falls
$a_{ij} = 0$ für alle $i = 2, \dots, n,\ j = 1, \dots, i-1$.

c) A heißt untere Dreiecksmatrix, falls A^T obere Dreiecksmatrix ist.

d) A heißt Diagonalmatrix, falls A obere und untere Dreiecksmatrix ist.

e) A heißt Permutationsmatrix, falls in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Eintrag 1 ist und alle anderen Einträge 0 sind.

Beispiele:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Invertierung von Permutationsmatrizen

Theorem

Die Menge der Permutationsmatrizen in $R^{n,n}$ *bildet eine multiplikative Gruppe. Ist* $A \in R^{n,n}$ *eine Permutationsmatrix, so gilt* $A^{-1} = A^T$.

Invertierung von Permutationsmatrizen

Theorem

Die Menge der Permutationsmatrizen in $R^{n,n}$ bildet eine multiplikative Gruppe. Ist $A \in R^{n,n}$ eine Permutationsmatrix, so gilt $A^{-1} = A^T$.

Beweis: Seien $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in R^{n,n}$ Permutationsmatrizen, $C = A \cdot B = [c_{ij}]$ mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = [a_{i1}, \ldots, a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}.$$

Invertierung von Permutationsmatrizen

Theorem

Die Menge der Permutationsmatrizen in $R^{n,n}$ bildet eine multiplikative Gruppe. Ist $A \in R^{n,n}$ eine Permutationsmatrix, so gilt $A^{-1} = A^T$.

Beweis: Seien $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in R^{n,n}$ Permutationsmatrizen, $C = A \cdot B = [c_{ij}]$ mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = [a_{i1}, \ldots, a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}.$$

Da es nur genau ein Element a_{ik} gibt, welches von 0 verschieden (nämlich $= 1$) ist, und genau ein Element b_{kj}, welches von 0 verschieden ($= 1$) ist, so gibt es in jeder Zeile und in jeder Spalte von C genau ein von Null verschiedenes Element ($= 1$), nämlich dort, wo $a_{ik} = b_{kj} = 1$ ist. Sei $A \cdot A^T = C = [c_{ij}]$. Dann gilt:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{jk} = \delta_{ij}.$$

Invertierung von Diagonalmatrizen

Theorem

Die Menge der invertierbaren Diagonalmatrizen bildet eine kommutative multiplikative Gruppe.

Invertierung von Diagonalmatrizen

Theorem

Die Menge der invertierbaren Diagonalmatrizen bildet eine kommutative multiplikative Gruppe.

Beweis: Die Abgeschlossenheit des Produktes, und die Gesetze (Ass $\cdot$) und (Eins) sind klar. Seien $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ Diagonalmatrizen. $C = A^{-1}$ existiert nach Voraussetzung. Aus der Formel für die Inverse folgt $c_{ij} = \delta_{ij} a_{ii}^{-1}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Also ist C Diagonalmatrix. Weiterhin gilt

$$A \cdot B = \mathrm{diag}(a_{11}\, b_{11}, \ldots, a_{nn}\, b_{nn}) = \mathrm{diag}(b_{11}\, a_{11}, \ldots, b_{nn}\, a_{nn}) = B \cdot A.$$

Invertierung von Dreiecksmatrizen I

Theorem

Die Menge der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen in $R^{n,n}$ *ist bezüglich der Matrixmultiplikation eine (nicht kommutative) Gruppe. (Analoges gilt für invertierbare untere Dreiecksmatrizen.)*

Invertierung von Dreiecksmatrizen I

Theorem

Die Menge der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen in $R^{n,n}$ ist bezüglich der Matrixmultiplikation eine (nicht kommutative) Gruppe. (Analoges gilt für invertierbare untere Dreiecksmatrizen.)

Beweis: Es seien $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ invertierbare obere Dreiecksmatrizen in $R^{n,n}$. Wir müssen für die Abgeschlossenheit der Menge (unter Multiplikation) zunächst beweisen, dass $A \cdot B$ wieder eine obere Dreiecksmatrix ist. Sei $C = A \cdot B = [c_{ij}]$. Für $i > j$ gilt

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{j} a_{ik}\, b_{kj} && (\text{da } b_{kj} = 0 \text{ für } k > j) \\ &= 0. && (\text{da } a_{ik} = 0 \text{ für } i > k) \end{aligned}$$