Dreiecksmatrizen. Elementarmatrizen.

Lineare Algebra I

Kapitel 4-5

8. Mai 2012

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/˜holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Invertierung von Dreiecksmatrizen I

Theorem

Die Menge der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen in $R^{n,n}$ ist bezüglich der Matrixmultiplikation eine (nicht kommutative) Gruppe. (Analoges gilt für invertierbare untere Dreiecksmatrizen.)

Invertierung von Dreiecksmatrizen I

Theorem

Die Menge der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen in $R^{n,n}$ ist bezüglich der Matrixmultiplikation eine (nicht kommutative) Gruppe. (Analoges gilt für invertierbare untere Dreiecksmatrizen.)

Beweis: Es seien $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ invertierbare obere Dreiecksmatrizen in $R^{n,n}$. Wir müssen für die Abgeschlossenheit der Menge (unter Multiplikation) zunächst beweisen, dass $A \cdot B$ wieder eine obere Dreiecksmatrix ist. Sei $C = A \cdot B = [c_{ij}]$. Für $i > j$ gilt

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{j} a_{ik}\, b_{kj} && (\text{da } b_{kj} = 0 \text{ für } k > j) \\ &= 0. && (\text{da } a_{ik} = 0 \text{ für } i > k) \end{aligned}$$

Invertierung von Dreiecksmatrizen II

Die Gültigkeit von (Ass $\cdot$) und (Eins) ist klar. Nun müssen wir noch zeigen, dass A^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist (die Existenz der Inversen ist klar nach Voraussetzung).

Invertierung von Dreiecksmatrizen II

Die Gültigkeit von (Ass $\cdot$) und (Eins) ist klar. Nun müssen wir noch zeigen, dass A^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist (die Existenz der Inversen ist klar nach Voraussetzung).

Wie bekommen wir A^{-1}? Wir suchen $C = [c_{ij}]$, so dass $CA = AC = I_n$, d.h., für alle $j = 1, \dots, n$ gilt

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{1j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{bmatrix} \qquad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \right)$$

Invertierung von Dreiecksmatrizen II

Die Gültigkeit von (Ass $\cdot$) und (Eins) ist klar. Nun müssen wir noch zeigen, dass A^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist (die Existenz der Inversen ist klar nach Voraussetzung).

Wie bekommen wir A^{-1}? Wir suchen $C = [c_{ij}]$, so dass $CA = AC = I_n$, d.h., für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{1j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{bmatrix} \qquad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \right)$$

Wenn wir uns die letzte Zeile anschauen, haben wir sofort, dass aus $a_{nn}\, c_{nj} = \delta_{nj}$ folgt, dass $c_{nj} = \delta_{nj} a_{nn}^{-1}$ und damit folgt aus der Existenz der Inversen von A, dass a_{nn} invertierbar sein muss.

Invertierung von Dreiecksmatrizen II

Die Gültigkeit von (Ass $\cdot$) und (Eins) ist klar. Nun müssen wir noch zeigen, dass A^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist (die Existenz der Inversen ist klar nach Voraussetzung).

Wie bekommen wir A^{-1}? Wir suchen $C = [c_{ij}]$, so dass $CA = AC = I_n$, d.h., für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{1j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{bmatrix} \qquad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \right)$$

Wenn wir uns die letzte Zeile anschauen, haben wir sofort, dass aus $a_{nn}\, c_{nj} = \delta_{nj}$ folgt, dass $c_{nj} = \delta_{nj} a_{nn}^{-1}$ und damit folgt aus der Existenz der Inversen von A, dass a_{nn} invertierbar sein muss.
Dann erhalten wir aus der vorlezten Zeile, dass

$$a_{n-1,n-1}\, c_{n-1,j} + a_{n-1,n}\, c_{nj} = \delta_{n-1,j},$$

und damit

$$c_{n-1,j} = a_{n-1,n-1}^{-1} \left(\delta_{n-1,j} - a_{n-1,n}\, c_{nj}\right).$$

Invertierung von Dreiecksmatrizen III

Wieder folgt aus der Existenz der Inversen von A die Existenz von $a_{n-1,n-1}^{-1}$. Wir zeigen nun per Induktion, rückwärts, dass C obere Dreiecksmatrix ist und die folgende **Formel für die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix (Rückwärts-Einsetzen)** für $j = 1, \ldots, n$ gilt:

$$c_{nj} = a_{nn}^{-1}\delta_{nj},$$

$$c_{ij} = a_{ii}^{-1}\left(\delta_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}\, c_{kj}\right), \qquad i = n-1, \ldots, 1.$$

Invertierung von Dreiecksmatrizen III

Wieder folgt aus der Existenz der Inversen von A die Existenz von $a_{n-1,n-1}^{-1}$. Wir zeigen nun per Induktion, rückwärts, dass C obere Dreiecksmatrix ist und die folgende **Formel für die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix (Rückwärts-Einsetzen)** für $j = 1, \dots, n$ gilt:

$$\begin{aligned} c_{nj} &= a_{nn}^{-1}\delta_{nj}, \\ c_{ij} &= a_{ii}^{-1} \left(\delta_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}\, c_{kj} \right), \qquad i = n-1, \dots, 1. \end{aligned}$$

Dann:

I.A.: $\quad c_{nj} = \delta_{nj} a_{nn}^{-1} (= 0 \text{ für } j < n).$

Invertierung von Dreiecksmatrizen III

Wieder folgt aus der Existenz der Inversen von A die Existenz von $a_{n-1,n-1}^{-1}$. Wir zeigen nun per Induktion, rückwärts, dass C obere Dreiecksmatrix ist und die folgende **Formel für die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix (Rückwärts-Einsetzen)** für $j = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\begin{aligned} c_{nj} &= a_{nn}^{-1}\delta_{nj}, \\ c_{ij} &= a_{ii}^{-1}\left(\delta_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}\, c_{kj}\right), \qquad i = n-1, \ldots, 1. \end{aligned}$$

Dann:

I.A.: $c_{nj} = \delta_{nj} a_{nn}^{-1} (= 0$ für $j < n)$.

I.V.: Für ein l und für k mit $l \leq k \leq n$ gelte die Formel für $c_{k,j}$ für alle $j = 1, \ldots n$. Insbesondere sei $c_{kj} = 0$ für $k = j+1, \ldots, n$.

Invertierung von Dreiecksmatrizen III

Wieder folgt aus der Existenz der Inversen von A die Existenz von $a_{n-1,n-1}^{-1}$. Wir zeigen nun per Induktion, rückwärts, dass C obere Dreiecksmatrix ist und die folgende **Formel für die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix (Rückwärts-Einsetzen)** für $j = 1, \ldots, n$ gilt:

$$c_{nj} = a_{nn}^{-1} \delta_{nj},$$

$$c_{ij} = a_{ii}^{-1} \left(\delta_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}\, c_{kj} \right), \qquad i = n-1, \ldots, 1.$$

Dann:

I.A.: $c_{nj} = \delta_{nj} a_{nn}^{-1} (= 0$ für $j < n)$.

I.V.: Für ein l und für k mit $l \leq k \leq n$ gelte die Formel für $c_{k,j}$ für alle $j = 1, \ldots n$. Insbesondere sei $c_{kj} = 0$ für $k = j+1, \ldots, n$.

I.S.: Dann gilt für die Spalte $l-1$:

$$c_{l-1,j} = a_{l-1,l-1}^{-1} \left(\delta_{l-1,j} - \sum_{k=l}^{n} a_{l-1,k}\, c_{kj} \right)$$

und damit folgt die Behauptung.

Beispiel.

Wir haben

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{und}$$

Beispiel.

Wir haben

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Beispiel.

Wir haben

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elementarmatrizen

Versuchen wir, die Matrix erst auf eine Dreiecksform zu bringen, und zwar durch Multiplikation mit Matrizen, deren Inverse wir leicht berechnen können.

Diese sogenannten Elementarmatrizen führen elementare Operationen aus:

- Vertauschung zweier Zeilen,
- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar,
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Es sei $P_{ij} \in R^{n,n}$ für $1 \leq i < j \leq n$ die Permutationsmatrix

$$P_{ij} := \begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\ \hline
&&& 0 &&&& 1 &&& \\ \hline
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\ \hline
&&& 1 &&&& 0 &&& \\ \hline
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccccccc} &&& \uparrow &&&& \uparrow &&& \\ &&& i &&&& j &&& \end{array} &
\end{array} .$$

Es sei $P_{ij} \in R^{n,n}$ für $1 \leq i < j \leq n$ die Permutationsmatrix

$$P_{ij} := \begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & & & & \\ \hline
 & 0 & & 1 & \\ \hline
 & & \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & & \\ \hline
 & 1 & & 0 & \\ \hline
 & & & & \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}
\end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} & \uparrow & & \uparrow & \\ & i & & j & \end{array} &
\end{array} .$$

Ist $A \in R^{n,m}$, so werden durch die Multiplikation $P_{ij}A$ die Zeilen i und j in A vertauscht. **Beachte:** $P_{ij} = P_{ij}^T = P_{ij}^{-1}$.

Es sei $M_i(\lambda) \in R^{n,n}$ für $1 \leq i \leq n$, $\lambda \in R$ invertierbar die Matrix

$$M_i(\lambda) := \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \hline & & & \lambda & & & \\ \hline & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ i \end{array} & \end{array} .$$

Ist $A \in R^{n,m}$, so wird durch die Multiplikation $M_i(\lambda)A$ die i-te Zeile von A mit λ multipliziert.

Beachte: $M_i(\lambda)^{-1} = M_i\left(\lambda^{-1}\right)$.

Es sei $G_{ij}(\lambda) \in R^{n,n}$ für $1 \leq i < j \leq n$, $\lambda \in R$ die Matrix

$$G_{ij}(\lambda) := \begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\ \hline
& & & 1 & & & & & & & \\ \hline
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\ \hline
& & & \lambda & & & & 1 & & & \\ \hline
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{array}\right] &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccc} \uparrow & \qquad\qquad & \uparrow \\ i & & j \end{array} &
\end{array} .$$

Es sei $G_{ij}(\lambda) \in R^{n,n}$ für $1 \leq i < j \leq n$, $\lambda \in R$ die Matrix

$$G_{ij}(\lambda) := \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ \hline & & & 1 & & & & & & & \\ \hline & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ \hline & & & \lambda & & & & 1 & & & \\ \hline & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & \\ & & & i & & & & j & & & \end{array} & \end{array} .$$

Es sei $A \in R^{n,m}$. Durch die Multiplikation $G_{ij}(\lambda)A$ wird das λ-fache der i-ten Zeile von A zur j-ten Zeile addiert. Durch die Multiplikation $G_{ij}^T(\lambda)A$ wird das λ-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile von A addiert.
Beachte: $[G_{ij}(\lambda)]^{-1} = G_{ij}(-\lambda)$.