Die Treppennormalform

Lineare Algebra I

Kapitel 5

7. Mai 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/˜holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Elementarmatrizen

Versuchen wir, die Matrix erst auf eine Dreiecksform zu bringen, und zwar durch Multiplikation mit Matrizen, deren Inverse wir leicht berechnen können.

Diese sogenannten Elementarmatrizen führen elementare Operationen aus:

- Vertauschung zweier Zeilen,
- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar,
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Es sei $P_{ij} \in R^{n,n}$ für $1 \leq i < j \leq n$ die Permutationsmatrix

$$P_{ij} := \begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
\hline
& & & 0 & & & & 1 & & & \\
\hline
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
\hline
& & & 1 & & & & 0 & & & \\
\hline
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
&
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccccccc}
& & & \uparrow & & & & \uparrow & & & \\
& & & i & & & & j & & &
\end{array}
&
\end{array} .$$

Es sei $P_{ij} \in R^{n,n}$ für $1 \leq i < j \leq n$ die Permutationsmatrix

$$P_{ij} := \begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
\hline
& & & 0 & & & & 1 & & & \\
\hline
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
\hline
& & & 1 & & & & 0 & & & \\
\hline
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
&
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccccccc}
& & & \uparrow & & & & \uparrow & & & \\
& & & i & & & & j & & &
\end{array}
&
\end{array} .$$

Ist $A \in R^{n,m}$, so werden durch die Multiplikation $P_{ij}A$ die Zeilen i und j in A vertauscht. **Beachte:** $P_{ij} = P_{ij}^T = P_{ij}^{-1}$.

Es sei $M_i(\lambda) \in R^{n,n}$ für $1 \leq i \leq n$, $\lambda \in R$ invertierbar die Matrix

$$M_i(\lambda) := \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \hline & & & \lambda & & & \\ \hline & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & \uparrow & & & \\ & & & i & & & \end{array} & \end{array} .$$

Ist $A \in R^{n,m}$, so wird durch die Multiplikation $M_i(\lambda)A$ die i-te Zeile von A mit λ multipliziert.

Beachte: $M_i(\lambda)^{-1} = M_i\left(\lambda^{-1}\right)$.

Es sei $G_{ij}(\lambda) \in R^{n,n}$ für $1 \leq i < j \leq n$, $\lambda \in R$ die Matrix

$$G_{ij}(\lambda) := \begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc}
1 &&&&&&&&&& \\
&\ddots&&&&&&&&& \\
&&1&&&&&&&& \\ \hline
&&&1&&&&&&& \\ \hline
&&&&1&&&&&& \\
&&&&&\ddots&&&&& \\
&&&&&&1&&&& \\ \hline
&&&\lambda&&&&1&&& \\ \hline
&&&&&&&&1&& \\
&&&&&&&&&\ddots& \\
&&&&&&&&&&1
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c}\uparrow \\ i\end{array} & \quad \begin{array}{c}\uparrow \\ j\end{array}
\end{array}
&
\end{array} .$$

Es sei $G_{ij}(\lambda) \in R^{n,n}$ für $1 \leq i < j \leq n$, $\lambda \in R$ die Matrix

$$G_{ij}(\lambda) := \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & & & & \\ \hline & 1 & & & \\ \hline & & \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & & \\ \hline & \lambda & & 1 & \\ \hline & & & & \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \qquad\qquad & \begin{matrix}\uparrow\\ i\end{matrix} & \qquad\qquad\qquad & \begin{matrix}\uparrow\\ j\end{matrix} & \qquad\qquad\qquad \end{array} & \end{array} .$$

Es sei $A \in R^{n,m}$. Durch die Multiplikation $G_{ij}(\lambda)A$ wird das λ-fache der i-ten Zeile von A zur j-ten Zeile addiert. Durch die Multiplikation $G_{ij}^T(\lambda)A$ wird das λ-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile von A addiert.

Beachte: $[G_{ij}(\lambda)]^{-1} = G_{ij}(-\lambda)$.

Die Treppennormalform

Hauptsatz 1.

Sei K ein Körper, $A \in K^{n,m}$. Dann gibt es Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_t \in K^{n,n}$, so dass $T_t \cdots T_1 A$ in Treppennormalform

$$\left[\begin{array}{c|cc|cc|cc|c|cc}
0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * & & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & & \vdots & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \ddots & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0
\end{array}\right]$$

ist. Insbesondere, falls $n = m$ und A invertierbar ist, so ist $T_t \cdots T_1 A = I$, d.h., $A^{-1} = T_t \cdots T_1$ oder $A = T_1^{-1} \cdots T_t^{-1}$.

Satz zur Eindeutigkeit der TNF

Satz 2.
Es sei K ein Körper und $A, B \in K^{n,m}$ in Treppennormalform. Falls es eine invertierbare Matrix $Z \in K^{n,n}$ mit $A = ZB$ gibt, so gilt $A = B$, d.h., die Treppennormalform ist invariant unter Multiplikation mit invertierbaren Matrizen von links.

Satz zur Eindeutigkeit der TNF

Satz 2.
Es sei K ein Körper und $A, B \in K^{n,m}$ in Treppennormalform. Falls es eine invertierbare Matrix $Z \in K^{n,n}$ mit $A = ZB$ gibt, so gilt $A = B$, d.h., die Treppennormalform ist invariant unter Multiplikation mit invertierbaren Matrizen von links.

Beweis.
Es seien a_i, b_i, $i = 1, \dots, m$, die Spalten von A, B. Weiterhin seien $(1, j_1), \dots, (s, j_s)$ die Pivotpositionen von B.
Wir zeigen mit vollständiger Induktion über r, $1 \leq r \leq s$:
Es gilt

$$Z = \left[\begin{array}{c|c} I_r & * \\ \hline 0 & Z_{n-r} \end{array}\right],$$

wobei Z_{n-r} invertierbar ist, und die ersten $j_{r+1} - 1$ Spalten von A und B stimmen überein. (Wir setzen $j_{s+1} := m + 1$.)

Beweis

I.A.: Es gilt $b_k = 0$ für $1 \leq k \leq j_1 - 1$. Da $A = Z \cdot B$, gilt auch $a_k = 0$, $1 \leq k \leq j_1 - 1$. Weiter ist $b_{j_1} = [1, 0, \ldots, 0]^T$, und da Z invertierbar ist, ist auch $a_{j_1} \neq 0$. Da A in TNF ist, folgt, dass auch $a_{j1} = [1, 0, \ldots, 0]^T$. Weiterhin folgt, dass

$$Z = \left[\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & Z_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right].$$

Damit ist auch $a_k = b_k$, $k = j_1 + 1, \ldots, j_2 - 1$.

Beweis

I.A.: Es gilt $b_k = 0$ für $1 \leq k \leq j_1 - 1$. Da $A = Z \cdot B$, gilt auch $a_k = 0$, $1 \leq k \leq j_1 - 1$. Weiter ist $b_{j_1} = [1, 0, \ldots, 0]^T$, und da Z invertierbar ist, ist auch $a_{j_1} \neq 0$. Da A in TNF ist, folgt, dass auch $a_{j1} = [1, 0, \ldots, 0]^T$. Weiterhin folgt, dass

$$Z = \left[\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & Z_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right].$$

Damit ist auch $a_k = b_k$, $k = j_1 + 1, \ldots, j_2 - 1$.

I.V.: Die Aussage gelte für ein r, $1 \leq r \leq s - 1$.

Beweis

I.A.: Es gilt $b_k = 0$ für $1 \leq k \leq j_1 - 1$. Da $A = Z \cdot B$, gilt auch $a_k = 0$, $1 \leq k \leq j_1 - 1$. Weiter ist $b_{j_1} = [1, 0, \dots, 0]^T$, und da Z invertierbar ist, ist auch $a_{j_1} \neq 0$. Da A in TNF ist, folgt, dass auch $a_{j1} = [1, 0, \dots, 0]^T$. Weiterhin folgt, dass

$$Z = \left[\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & Z_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right].$$

Damit ist auch $a_k = b_k$, $k = j_1 + 1, \dots, j_2 - 1$.

I.V.: Die Aussage gelte für ein r, $1 \leq r \leq s - 1$.

I.S.: Wir betrachten die Pivotposition $(r + 1, j_{r+1})$. Da B in TNF ist, folgt

$$b_{j_{r+1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \; r+1. \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Wegen $a_{j_{r+1}} = Zb_{j_{r+1}}$ und der Invertierbarkeit von Z_{n-r} folgt wie in der Induktionsannahme $a_{j_{r+1}} = b_{j_{r+1}}$ und

$$Z = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & & * \\ \hline & 1 & * \\ \hline & & Z_{n-(r+1)} \end{array}\right] & \begin{array}{l} r \\ \\ 1 \\ \\ n-r-1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} r & \qquad 1 & \qquad n-r-1 \end{array} & \end{array} ,$$

und die ersten $j_{r+2} - 1$ Spalten von A und B sind gleich.

Eindeutigkeit der TNF

Korollar.

Für $A \in K^{n,m}$ gelten:
(1) Es gibt genau eine Matrix $C \in K^{n,m}$ in TNF, in die sich A durch elementary Zeilenoperationen überführen lässt.

Eindeutigkeit der TNF

Korollar.

Für $A \in K^{n,m}$ gelten:
(1) Es gibt genau eine Matrix $C \in K^{n,m}$ in TNF, in die sich A durch elementary Zeilenoperationen überführen lässt.

(2) Ist $M \in GL_n(K)$, so ist C auch die TNF von MA, d.h. die TNF ist invariant unter Linksmultiplikation mit invertierbaren Matrizen.

Eindeutigkeit der TNF

Korollar.

Für $A \in K^{n,m}$ gelten:
(1) Es gibt genau eine Matrix $C \in K^{n,m}$ in TNF, in die sich A durch elementary Zeilenoperationen überführen lässt.

(2) Ist $M \in GL_n(K)$, so ist C auch die TNF von MA, d.h. die TNF ist invariant unter Linksmultiplikation mit invertierbaren Matrizen.

Beweis.

(1) Sind $S_1 A = C_1$ und $S_2 A = C_2$, wobei C_1, C_2 in TNF und S_1, S_2 invertierbar sind, dann gilt $C_1 = (S_1 S_2^{-1}) C_2$. Aus Satz 2 folgt nun $C_1 = C_2$.

Eindeutigkeit der TNF

Korollar.

Für $A \in K^{n,m}$ gelten:
(1) Es gibt genau eine Matrix $C \in K^{n,m}$ in TNF, in die sich A durch elementary Zeilenoperationen überführen lässt.

(2) Ist $M \in GL_n(K)$, so ist C auch die TNF von MA, d.h. die TNF ist invariant unter Linksmultiplikation mit invertierbaren Matrizen.

Beweis.

(1) Sind $S_1 A = C_1$ und $S_2 A = C_2$, wobei C_1, C_2 in TNF und S_1, S_2 invertierbar sind, dann gilt $C_1 = (S_1 S_2^{-1})C_2$. Aus Satz 2 folgt nun $C_1 = C_2$.

(2) Ist $M \in GL_n(K)$ und $S_3(MA) = C_3$ in TNF, do folgt mit $S_1 A = C_1$, dass $C_3 = (S_3 M S_1^{-1})C_1$. Satz 2 zeigt $C_3 = C_1$.