PLU Zerlegung und Rang von Matrizen

Lineare Algebra I

Kapitel 5

8. Mai 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/˜holtz   Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097   Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

PLU Zerlegung

Theorem.
Für jede Matrix $A \in K^{n,n}$ gibt es eine Permutationsmatrix $P \in K^{n,n}$, eine untere Dreiecksmatrix $L \in GL_n(K)$ mit 1-Diagonale und eine obere Dreiecksmatrix $U \in K^{n,n}$ so dass $A = PLU$ ist. Die Matrix U ist genau dann invertierbar, wenn A invertierbar ist.

PLU Zerlegung

Theorem.
Für jede Matrix $A \in K^{n,n}$ gibt es eine Permutationsmatrix $P \in K^{n,n}$, eine untere Dreiecksmatrix $L \in GL_n(K)$ mit 1-Diagonale und eine obere Dreiecksmatrix $U \in K^{n,n}$ so dass $A = PLU$ ist. Die Matrix U ist genau dann invertierbar, wenn A invertierbar ist.

Beweis: A hat ihre TNF $\tilde{U}$: $S_n S_{n-1} \cdots S_1 A = \widetilde{U}$, wobei $\widetilde{U}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Da die Matrizen S_1 bis S_n invertierbar sind, ist A genau dann invertierbar, wenn $\tilde{U}$ invertierbar ist:

$$\widetilde{U} = S_n \cdots S_1 A \implies A = S_1^{-1} \cdots S_n^{-1} \cdot \widetilde{U}.$$

PLU Zerlegung

Theorem.
Für jede Matrix $A \in K^{n,n}$ gibt es eine Permutationsmatrix $P \in K^{n,n}$, eine untere Dreiecksmatrix $L \in GL_n(K)$ mit 1-Diagonale und eine obere Dreiecksmatrix $U \in K^{n,n}$ so dass $A = PLU$ ist. Die Matrix U ist genau dann invertierbar, wenn A invertierbar ist.

Beweis: A hat ihre TNF $\tilde{U}$: $S_n S_{n-1} \cdots S_1 A = \widetilde{U}$, wobei $\widetilde{U}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Da die Matrizen S_1 bis S_n invertierbar sind, ist A genau dann invertierbar, wenn $\tilde{U}$ invertierbar ist:

$$\widetilde{U} = S_n \cdots S_1 A \implies A = S_1^{-1} \cdots S_n^{-1} \cdot \widetilde{U}.$$

Jedes S_i hat die Form

$$S_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & s_{i,i} & & & \\ & & & s_{i+1,i} & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & s_{n,i} & & & 1 \end{bmatrix} P_{i,j_i} \qquad \text{mit } j_i \geq i.$$

PLU Zerlegung: Beweis I

Also $S_n \cdots S_1 =$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & s_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & s_{n-1,n-1} & \\ & & & s_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} P_{n-1,j_{n-1}} \cdots$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & s_{22} & & & \\ & s_{32} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & s_{n,2} & & & 1 \end{bmatrix} P_{2,j_2} \begin{bmatrix} s_{11} & & & & \\ s_{21} & 1 & & & \\ s_{31} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ s_{n,1} & & & & 1 \end{bmatrix} P_{1,j_1}$$

mit $j_i \geq i$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$.

PLU Zerlegung: Beweis II

Es gilt aber, dass durch die Multiplikation mit $P_{n-1,j_{n-1}}$ in

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & s_{n-2,n-2} & & \\ & & & s_{n-1,n-2} & 1 & \\ & & & s_{n,n-2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

höchstens die letzten beiden Zeilen vertauscht werden, also kann man schreiben

$$P_{n-1,j_{n-1}} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & s_{n-2,n-2} & & \\ & & & s_{n-1,n-2} & 1 & \\ & & & s_{n,n-2} & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & s_{n-2,n-2} & & \\ & & & \tilde{s}_{n-1,n-2} & 1 & \\ & & & \tilde{s}_{n,n-2} & & 1 \end{bmatrix} P_{n-1,j_{n-1}}.$$

(Durch die Multiplikation AP_{ij} werden die Spalten i und j in A vertauscht.)

PLU Zerlegung: Beweis III

Analog gilt

$$P_{k,j_k}\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & s_{l,l} & & & \\ & & & s_{l+1,l} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & s_{n,l} & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & s_{l,l} & & & \\ & & & \tilde{s}_{l+1,l} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \tilde{s}_{n,l} & & & 1 \end{bmatrix} P_{k,j_k}$$

für $k = 2, \ldots, n-1,\ l = 1, \ldots, k-1.$

PLU Zerlegung: Beweis III

Analog gilt

$$P_{k,j_k}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & s_{l,l} & & & \\ & & s_{l+1,l} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & s_{n,l} & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & s_{l,l} & & & \\ & & \tilde{s}_{l+1,l} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \tilde{s}_{n,l} & & & 1 \end{bmatrix} P_{k,j_k}$$

für $k = 2, \ldots, n-1,\ l = 1, \ldots, k-1$.

Es folgt per Induktion, dass $S_n \cdots S_1$ die Form $\tilde{L} \cdot \tilde{P}$ hat, wobei $\tilde{L}$ eine untere Dreiecksmatrix und $\tilde{P}$ eine Permutationsmatrix ist.

PLU Zerlegung: Beweis III

Analog gilt

$$P_{k,j_k} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & s_{l,l} & & & \\ & & & s_{l+1,l} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & s_{n,l} & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & s_{l,l} & & & \\ & & & \tilde{s}_{l+1,l} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \tilde{s}_{n,l} & & & 1 \end{bmatrix} P_{k,j_k}$$

für $k = 2, \dots, n-1$, $l = 1, \dots, k-1$.

Es folgt per Induktion, dass $S_n \cdots S_1$ die Form $\tilde{L} \cdot \tilde{P}$ hat, wobei $\tilde{L}$ eine untere Dreiecksmatrix und $\tilde{P}$ eine Permutationsmatrix ist. Also ist

$$A = S_1^{-1} \cdots S_n^{-1} \widetilde{U} = \tilde{P}^{-1} \tilde{L}^{-1} \widetilde{U} = PLU.$$

Rang

Definition.
Die Anzahl r der Pivotpositionen in der TNF von $A \in K^{n,m}$ wird der Rang von A genannt und $\mathrm{Rang}(A)$ bezeichnet.

Rang

Definition.
Die Anzahl r der Pivotpositionen in der TNF von $A \in K^{n,m}$ wird der Rang von A genannt und $\mathrm{Rang}(A)$ bezeichnet.

Eigenschaften vom Rang

1. $\mathrm{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Rang

Definition.

Die Anzahl r der Pivotpositionen in der TNF von $A \in K^{n,m}$ wird der Rang von A genannt und $\mathrm{Rang}(A)$ bezeichnet.

Eigenschaften vom Rang

1. $\mathrm{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.
2. $A \in K^{n,n}$ ist invertierbar genau dann wenn $\mathrm{Rang}(A) = n$.

Rang

Definition.

Die Anzahl r der Pivotpositionen in der TNF von $A \in K^{n,m}$ wird der **Rang von A** genannt und $\mathrm{Rang}(A)$ bezeichnet.

Eigenschaften vom Rang

1. $\mathrm{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.
2. $A \in K^{n,n}$ ist invertierbar genau dann wenn $\mathrm{Rang}(A) = n$.
3. Ist $A = BC$, so gilt $\mathrm{Rang}(A) \leq \mathrm{Rang}(B)$.

Rang

Definition.
Die Anzahl r der Pivotpositionen in der TNF von $A \in K^{n,m}$ wird der Rang von A genannt und $\mathrm{Rang}(A)$ bezeichnet.

Eigenschaften vom Rang

1. $\mathrm{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.
2. $A \in K^{n,n}$ ist invertierbar genau dann wenn $\mathrm{Rang}(A) = n$.
3. Ist $A = BC$, so gilt $\mathrm{Rang}(A) \leq \mathrm{Rang}(B)$.

Beweis. Sei $Q \in GL_n(K)$, so dass QB in TNF ist. Dann $QA = QBC$. In der Matrix QBC sind höchstens die ersten $\mathrm{Rang}(B)$ Zeilen von Null verscheiden. Die TNF von QA ist gleich der TNF von A. Somit können in der TNF von A ebenfalls höchstens die ersten $\mathrm{Rang}(B)$ Zeilen von Null verschieden sein. Also $\mathrm{Rang}(A) \leq \mathrm{Rang}(B)$.

Weitere Eigenschaften von Rang

4. Es gibt Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit

$$QAZ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

genau dann wenn $\mathrm{Rang}(A) = r$.

Weitere Eigenschaften von Rang

4. Es gibt Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit

$$QAZ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

genau dann wenn $\mathrm{Rang}(A) = r$.

Beweis. Ist $\mathrm{Rang}(A) = r = 0$, dann ist $A = 0$. Sonst gibt es $Q \in GL_n(K)$ so dass QA in TNF ist. Es gibt dann eine Permutationsmatrix $P \in K^{n,n}$, so dass

$$PA^T Q^T = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline V & 0 \end{array}\right],$$

wobei $V \in K^{m-r,r}$.

Weitere Eigenschaften von Rang

4. Es gibt Matrizen $Q \in GL_n(K)$ und $Z \in GL_m(K)$ mit

$$QAZ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

genau dann wenn $\mathrm{Rang}(A) = r$.

Beweis. Ist $\mathrm{Rang}(A) = r = 0$, dann ist $A = 0$. Sonst gibt es $Q \in GL_n(K)$ so dass QA in TNF ist. Es gibt dann eine Permutationsmatrix $P \in K^{n,n}$, so dass

$$PA^TQ^T = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline V & 0 \end{array}\right],$$

wobei $V \in K^{m-r,r}$. Nehmen wir nun

$$Y = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline -V & I_{m-r} \end{array}\right].$$

Es folgt

$$YPA^TQ^T = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

Mit $Z = P^TY^T$ ergibt sich das Resultat.