Lineare Algebra I – Tutoriumsaufgabe 2

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

1.) Ist $(\mathbb{Z}, \cdot)$ eine Gruppe?

2.) Sei $M := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $* : M \times M \to M$, $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$. Ist $(M, *)$ eine Gruppe?

3.) Sei $M := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ und $* : M \times M \to M$, $(a, b) \mapsto a^b$. Ist $(M, *)$ eine Gruppe?

4.) Sei $m \in \mathbb{N}$ fest. Wir schreiben $m\mathbb{Z} := \{mz \,|\, z \in \mathbb{Z}\}$. Untersuche, ob $(m\mathbb{Z}, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ ist.

2. Aufgabe
Sei R ein Ring mit Eins. Zeigen Sie, dass entweder $1 \neq 0$ oder $R = \{0\}$ gilt.

3. Aufgabe
Es sei $m \in \mathbb{N}$. Auf $\mathbb{Z}$ sei die Relation $\sim$ durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in m\mathbb{Z}$$

definiert.

1.) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

2.) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen $[n]$ für $n \in \mathbb{Z}$.

4. Aufgabe
Sei $M = \{\text{rot}, \text{blau}, \text{gelb}\}$. Geben Sie jeweils eine Relation $R_j, j = 1, \ldots, 6$, auf M mit folgenden Eigenschaften an:

1.) R_1 sei weder reflexiv, symmetrisch noch transitiv.

2.) R_2 sei symmetrisch, jedoch nicht reflexiv und nicht transitiv.

3.) R_3 sei symmetrisch und reflexiv, jedoch nicht transitiv.

4.) R_4 sei eine Äquivalenzrelation mit einer Äquivalenzklasse.

5.) R_5 sei eine Äquivalenzrelation mit zwei Äquivalenzklassen.

6.) R_6 sei eine Äquivalenzrelation mit drei Äquivalenzklassen.

Gesamtpunktzahl: 0