Technische Universität Berlin SoSe 2013
Institut für Mathematik http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS13/LinAlg1/
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. A. Międlar Stand: 25. April 2013

Lineare Algebra I – Tutoriumsaufgabe 3

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a_{ik} \end{bmatrix} \in R^{m,n}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^{n,1}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{bmatrix} \in R^{1,m}, \quad m, n > 1.$$

Welche der folgenden Ausdrücke sind für $m \neq n$ bzw. $m = n$ definiert und welche nicht?

(a) yAx, (b) $y^T Ax$, (c) $x^T Ay^T$, (d) $x^T Ay$, (e) $(Ax)^T y$,
(f) $x^T (yA)^T$, (g) Axy, (h) Axy^T, (i) $yx^T A^T$, (j) $A^T y^T x^T$,
(k) $y^T x^T A$, (l) xy, (m) yx.

2. Aufgabe
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $p = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 t^0 \in R[t]$ ein Polynom (d.h. mit $a_i \in R$ für $i = 0, 1, \ldots, n$) und $A \in R^{m,m}$. Dann ist $p(A) \in R^{m,m}$ durch

$$p(A) := a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_n$$

definiert. (Formal wird t^k durch A^k ersetzt, $k = 0, 1, \ldots, n$.)
Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2,2}$ und $p = t^2 - 2t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$. Berechnen Sie $p(A)$.

3. Aufgabe
Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 \end{bmatrix}$$

für $A \in R^{m,n}$, $x_1, x_2 \in R^{n,1}$ und $\mu_1, \mu_2 \in R$.

4. Aufgabe
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Wir definieren die Relation $\sim$ auf $R^{n,m}$ durch

$$A \sim B :\Leftrightarrow \exists\, P \in \mathrm{GL}_n(R), Q \in \mathrm{GL}_m(R) : A = P^{-1} B Q.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $R^{n,m}$ ist.
Zwei Matrizen A, B mit $A \sim B$ heißen *äquivalent*. Die Äquivalenzrelation $\sim$ wird *Äquivalenz von Matrizen* genannt.

Gesamtpunktzahl: 0