Lineare Algebra I – Tutoriumsaufgabe 4

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $A = \left[a_{i,j}\right] \in R^{n,n}$, $\lambda \in R$ und seien P_{ij}, $M_i(\lambda)$ und $G_{ij}(\lambda)$ die Elementarmatrizen aus der Vorlesung.

1.) Berechnen Sie Ae_j und $e_i^T A$. (Dabei ist e_j die j-te Spalte von I_n $(1 \leq j \leq n)$. Wir nennen e_j den j-ten *kanonischen Einheitsvektor* in $R^{n,1}$.)

2.) Berechnen Sie

- $P_{ij}A$ und AP_{ij}. Zeigen Sie $P_{ij} = P_{ij}^T = P_{ij}^{-1}$.
- $M_i(\lambda)A$ und $AM_i(\lambda)$. Zeigen Sie $M_i(\lambda)^{-1} = M_i(\lambda^{-1})$, falls λ invertierbar ist. (Es gilt sogar: $M_i(\lambda) \in (R^{n,n})^\times \Leftrightarrow \lambda \in R^\times$.)
- $G_{ij}(\lambda)A$ und $AG_{ij}(\lambda)$. Zeigen Sie $G_{ij}(\lambda)^{-1} = G_{ij}(-\lambda)$.

2. Aufgabe
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und seien $A_{11} \in R^{n_1,n_1}$, $A_{12} \in R^{n_1,n_2}$, $A_{21} \in R^{n_2,n_1}$ und $A_{22} \in R^{n_2,n_2}$. Zeigen Sie:

1.) Ist $A_{11} \in \mathrm{GL}_{n_1}(R)$, so gilt

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}.$$

2.) Ist $A_{22} \in \mathrm{GL}_{n_2}(R)$, so gilt

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I_{n_2} \end{bmatrix}.$$

3. Aufgabe
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Sei $A \in R^{n,n}$ eine Matrix, so dass $I_n - A$ invertierbar ist. Zeigen Sie für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung $(I_n - A)^{-1}(I_n - A^{m+1}) = \sum_{j=0}^{m} A^j$.

Gesamtpunktzahl: 0