Technische Universität Berlin SoSe 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS13/LinAlg1/`
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. A. Międlar Stand: 10. Mai 2013

Lineare Algebra I – Tutoriumsaufgabe 5

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe
Berechnen Sie die Treppennormalform von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 48 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2,3}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}.$$

Geben Sie dabei die verwendeten Elementarmatrizen an. Ist eine der Matrizen A, B, C invertierbar? Falls ja, dann berechnen Sie die entsprechende Inverse als Produkt der Elementarmatrizen.

2. Aufgabe
Beweisen Sie den folgenden Satz.

Satz. *Seien K ein Körper und $A \in K^{n,n}$. Dann gilt:*

1.) A ist genau dann invertierbar, wenn die Treppennormalform von $\begin{bmatrix} A & I_n \end{bmatrix} \in K^{n,2n}$ die Gestalt $\begin{bmatrix} I_n & B \end{bmatrix}$ hat ($B \in K^{n,n}$).

2.) Gilt eine der beiden Bedingungen, so ist $B = A^{-1}$.

Bemerkung: Damit haben wir einen verbesserten „Test auf Invertierbarkeit" für Matrizen, der gleichzeitig die Inverse bestimmt, falls diese existiert.

3. Aufgabe
Berechnen Sie die Treppennormalform folgender Matrizen unter Angabe der verwendeten Elementarmatrizen und geben Sie die Inverse an, falls diese existiert.

1.) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{1,1}$,

2.) $B = \begin{bmatrix} 2i & -2i \\ 1024 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$,

3.) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{3,2}$, 4.) $D = \begin{bmatrix} 2 & -e^2 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}e^2 & -\pi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$,

5.) $E = \begin{bmatrix} 2i & 1 & -i \\ 1 & -2i & 1 \\ -1 & -i & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$.

4. Aufgabe
Beweisen Sie den folgenden Satz (Charakterisierung invertierbarer Matrizen über Körpern).

Satz. *Sei K ein Körper und $A \in K^{n,n}$. Dann sind äquivalent:*

1.) $\operatorname{Rang}(A) = n$

2.) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$

3.) Es existiert $B \in K^{n,n}$ mit $BA = I_n$ (d.h. A hat eine Linksinverse)

4.) Es existiert $C \in K^{n,n}$ mit $AC = I_n$ (d.h. A hat eine Rechtsinverse)

5.) Die Treppennormalform von $\begin{bmatrix} A & I_n \end{bmatrix}$ hat die Gestalt $\begin{bmatrix} I_n & D \end{bmatrix}$ für ein $D \in K^{n,n}$.

Gesamtpunktzahl: 0