**Technische Universität Berlin** SoSe 2013
**Institut für Mathematik** `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS13/LinAlg1/`
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. A. Międlar Stand: 27. Mai 2013

# Lineare Algebra I – Tutoriumsaufgabe 7

---

## Tutoriumsvorschläge

### 1. Aufgabe

1.) Bestimmen Sie alle Fehlstände, die Anzal der Fehlstände $k$ und das Signum $sgn(\sigma) := (-1)^k$ von $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.) Berechnen Sie mit der Leibnizformel die Determinante von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 2. Aufgabe

Sei $S_n$ die Menge aller Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$.

* Ist $\sigma \in S_n$ und existiert $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $r \geq 1$ Elementen, so dass

$$\sigma(i_k) = i_{k+1} \text{ für } k = 1, 2, \ldots, r-1, \quad \sigma(i_r) = i_1, \quad \sigma(i) = i \text{ für } i \notin \{i_1, \ldots, i_r\},$$

  dann nennen wir $\sigma$ ein *Zykel* (genauer ein $r$-*Zykel*) und schreiben $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$. (Der Plural von Zykel ist *Zykeln.*)

* Eine *Transposition* ist ein Zykel mit $r = 2$, d.h. der Gestalt $\tau = (i_1, i_2)$.

1.) Seien $n = 4$. Für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $i \neq j$ sei $\tau_{i,j} \in S_4$ diejenige Transposition, die $i$ und $j$ vertauscht, d.h. $\tau_{i,j} := (i, j)$. Berechnen Sie

   a) $\tau_{1,2} \circ \tau_{2,3}$,

   b) $\tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2}^{-1}$,

   c) $\tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{3,4}$.

2.) Seien $n \geq 4$ und $\sigma = [2, 3, 4, 1, 5, \ldots, n] = (1, 2, 3, 4)$. Berechnen Sie $\sigma^2$, $\sigma^3$, $\sigma^4$, $\sigma^5$.

**3. Aufgabe**
Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins.

1.) Seien $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}], C = [c_{ij}] \in R^{n,n}$. Für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ gelte $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}$ für alle $i, j$ mit $i \neq k$, sowie $a_{kj} = \lambda b_{kj} + \mu c_{kj}$ für alle $j$. Zeigen Sie

$$\det(A) = \lambda \det(B) + \mu \det(C).$$

Zeigen Sie, dass eine analoge Aussage für die Spalten von $A$ gilt.

2.) Finden Sie Matrizen $D, E \in R^{n,n}$, $n \geq 2$, mit $\det(D + E) \neq \det(D) + \det(E)$.

Gesamtpunktzahl: 0