Technische Universität Berlin SoSe 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS13/LinAlg1/`
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. A. Międlar Stand: 2. Juni 2013

Lineare Algebra I – Tutoriumsaufgabe 8

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4,4} \text{ oder allgemein } A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{n,n},$$

$$B = \begin{bmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{n,n}.$$

2. Aufgabe
Berechnen Sie die Determinante und die Adjunkte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in R^{3,3}$$

für $R = \mathbb{Z}$ und $R = \mathbb{R}$. Geben Sie die Inverse an, falls diese existiert.

3. Aufgabe
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $A \in R^{n,n}$, $n \geq 2$, so dass $\det(A)$ in R invertierbar ist. Zeigen Sie, dass dann $\det(\operatorname{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$ gilt.

4. Aufgabe
Sei $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

1.) $A^{-1} \in \mathbb{Q}^{n,n}$.

2.) $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n,n}$ genau dann, wenn $\det(A) \in \{\pm 1\}$.

3.) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat für jedes $b \in \mathbb{Z}^{n,1}$ eine eindeutige Lösung $\widehat{x} \in \mathbb{Z}^{n,1}$ genau dannn, wenn $\det(A) \in \{\pm 1\}$.

Gesamtpunktzahl: 0