Lineare Algebra I – Tutoriumsaufgabe 9

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

1.) Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sind diese Matrizen ähnlich zueinander?

2.) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

und rechnen Sie nach, dass $P_D(D) = 0$ ist.

2. Aufgabe

Seien R ein kommutativer Ring mit Eins und $A \in R^{n,n}$. Im Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton wird verwendet, dass $p(A)q(A) = q(A)p(A)$ gilt ($p, q \in R[t]$). Dies soll hier in drei Schritten gezeigt werden:

1.) $A^k A^\ell = A^\ell A^k$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_0$.

2.) $p(A)A^\ell = A^\ell p(A)$ für alle $p \in R[t]$ und $\ell \in \mathbb{N}_0$.

3.) $p(A)q(A) = q(A)p(A)$ für alle $p, q \in R[t]$.

3. Aufgabe Newton-Identität

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ Nullstellen von $p(t) = t^n + \beta_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \beta_0$. Zeigen Sie, dass für $s_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k$

$$\beta_{n-k} = -\frac{1}{k}\big(s_k + s_{k-1}\beta_{n-1} + \ldots + s_{k-2}\beta_{n-2} + \ldots + s_2\beta_{n-(k-2)} + s_1\beta_{n-(k-1)}\big).$$

Gesamtpunktzahl: 0