

Lineare Algebra I – Tutoriumsaufgabe 10

Tutoriumsvorschläge

Definition:

Sei $A \in K^{n,n}$. Das *Minimalpolynom* $m_A(X)$ der Matrix A ist das eindeutig bestimmte normierte (höchster Koeffizient ist 1) Polynom kleinsten Grades mit $m_A(A) = 0$.

1. Aufgabe

Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom $m_A(X)$ der Matrix A das charakteristische Polynom $p_A(X)$ teilt, d.h. $m_A(X) | p_A(X)$. Es teilt alle Polynome $f(X)$, die A als Nullstelle besitzen, d.h.

$$f(A) = 0 \Rightarrow m_A(X) | f(X).$$

2. Aufgabe

Eine Matrix $A \in K^{n,n}$ ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert ist.

3. Aufgabe

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}, \quad C = B \in \mathbb{C}^{4,4}.$$

Gesamtpunktzahl: 0