Lineare Algebra I – Tutoriumsaufgabe 11

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

1.) Sind die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^{3,1}$ linear unabhängig?

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Finden Sie $v_4 \in \mathbb{R}^{3,1}$, so dass $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^{3,1}$ ist.

2.) Zeigen Sie, dass die Funktionen sin und cos in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig sind.

2. Aufgabe

Sei $V = \mathbb{C}^{3,1}$ und seien $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1.) Zeigen Sie, dass $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^{3,1}$ ist.

2.) Bestimmen Sie die Koordinaten von $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 1 \end{bmatrix}$ bzgl. B.

3.) Seien $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dann ist $C := \{w_1, w_2, w_3\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^{3,1}$ (dies muss nicht gezeigt werden).
Bestimmen Sie die Basisübergangsmatrix von B nach C.

4.) Bestimmen Sie die Koordinaten von v bzgl. C.

3. Aufgabe

Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ der reellen Polynome höchstens dritten Grades. In V seien folgende Vektoren gegeben

$$v_1 = t - 1, v_2 = t^2 - 1, w_1 = t + 1, w_2 = t^2 - 2, w_3 = t^3, w_4 = 3t.$$

Untersuchen Sie, ob die Voraussetzungen des Basisergänzungssatzes für die Mengen $\{v_1, v_2\}$ und $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ erfüllt sind. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten $\{v_1, v_2\}$ mit Vektoren aus $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ zu einer Basis von V zu ergänzen.

Gesamtpunktzahl: 0