Kapitel 4

Klassische Theorie elliptischer Differentialgleichungen

4.1 Die Laplace-Gleichung

Definition: Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$, welche die Laplace-Gleichung löst, heißt *harmonisch* in Ω.

Laplace- und Poisson-Gleichung sind Musterbeispiele elliptischer Gleichungen. Allgemeinere Vertreter dieses Typs werden wir später diskutieren. Die Laplace-Gleichung ist *rotationsinvariant*. Das heißt, wenn $u = u(x)$ harmonisch ist und T eine orthogonale Koordinatentransformation, so ist auch $v = u(Tx)$ harmonisch. Deshalb ist es sinnvoll zunächst *radialsymmetrische* Lösungen der Laplace-Gleichung zu suchen. Dazu sei $x^o \in \mathbb{R}^n$ ein fester (Mittel-)Punkt,

$$r = r(x) = |x - x^o| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^o)^2 \right)^{1/2}$$

und u als Funktion von r angenommen, also $u = u(r) = u(|x - x^o|)$. Man bestätigt leicht (siehe Übung) den folgenden Sachverhalt: Ist u harmonisch und $u = u(r)$, dann gilt

$$u(r) = \begin{cases} c_1 + \frac{c_2}{r^{n-2}}, & n \geq 3 \\ c_1 + c_2 \ln r & n = 2. \end{cases}$$

Definition: Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)v_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3. \end{cases}$$

nennt sich *Fundamentallösung für die Laplace-Gleichung*. Dabei bezeichnet v_n das Volumen der Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung: Den Grund für die Wahl der Konstanten sehen wir später.

$$v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + n/2)}.$$

Man beachte die Singularität der Fundamentallösung im Nullpunkt.

Für das Folgende wiederholen wir einige Sätze aus der Vektoranalysis: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet mit Rand Γ, $a : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und alle Größen hinreichend glatt. Grundlegend ist der *Gaußsche Satz*

$$\int_\Omega \text{div } a \; dx = \int_\Gamma a \cdot \nu dS.$$

Dabei ist ν die nach außen zeigende Normale an Γ. Für $a = ue_i$ ($u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, e_i: i-ter Einheitsvektor) ergibt sich mit

$$\int_\Omega D_i u \; dx = \int_\Gamma u\nu_i dS = \int_\Gamma u \cos(\nu, e_i) dS$$

die *Formel der partiellen Integration*. Außerdem leitet man aus dem Gaußschen Satz (siehe Übung) die *1. Greensche Formel*

$$\int_\Omega u\Delta v \; dx = \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} u \; dS - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx$$

her. Als unmittelbare Folgerung daraus ergibt sich die *2. Greensche Formel*

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \; dx = \int_\Gamma (u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}) \; dS.$$

Bezeichnungen bei den mehrdimensionalen Integralen:

- $B(x_o, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \; |x - x_o| < r\}$ (offene Kugel mit Radius r um x_o)

- $S(x_o, r) = \partial B(x_o, r)$ (Sphäre, Kugeloberfläche)
- $|B(x,r)|$, $|S(x,r)|$ bezeichnet Raum- bzw. Oberflächeninhalt der Kugel bzw. der Sphäre.

Aus dem Cavalieri-Prinzip folgt

$$v_n = \int\limits_{|x|\le 1} dx = \int\limits_0^1 \int\limits_{|x|=r} dS_x dr = \int\limits_0^1 \omega_n r^{n-1}\, dr = \frac{\omega_n}{n},$$

also

$$|B(0,1)| = \frac{1}{n}|S(0,1)|.$$

4.2 Poisson-Gleichung

Wir werden später sehen, dass sich $\Delta\Phi$ wie die sogenannte δ-Distribution verhält, d.h. es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta\Phi(x) f(x)\, dx = f(0)$$

bei hinreichend glatter Funktion f. Die Funktion $\Phi(x)$ ist harmonisch, somit auch $\Phi(x-y)$ bei festem y und folglich auch $\Phi(x-y)f(y)$. Integrieren wir über $\mathbb{R}^n$, so erwartet man deshalb, dass auch

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy \tag{4.1}$$

harmonisch ist, indem man formal

$$\Delta u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_x \Phi(x-y) f(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} 0 \cdot f(y)\, dy = 0$$

rechnet. Diese Herangehensweise ist nicht nur inkorrekt, sie führt sogar zu einem falschen Ergebnis. Die Funktion Φ hat eine Singularität der Ordnung $|x|^{2-n}$ und ist damit problemlos integrierbar. Nach zweimaliger Differentiation sieht die Situation anders aus. Die Ordnung ist nun $|x|^{-n}$ und das Integral existiert nicht mehr. Im nächsten Satz sehen wir, was wirklich passiert. Dazu definieren wir noch $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ als die Menge aller zweimal stetig auf $\mathbb{R}^n$ differenzierbaren Funktionen, die außerhalb einer kompakten Menge verschwinden.

Satz 6 *Es sei $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ und u durch die Formel (4.1) gegeben. Dann gilt $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und*

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{4.2}$$

Beweis: **(i)** $u \in C^2$

Wir schreiben um,

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y)\, dy$$

Da Φ auf $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist, kann man Grenzübergänge und Integration vertauschen (Lebesgues Satz über die dominierte Konvergenz, Integration über eine kompakte Menge)

$$\begin{aligned} D_i u(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) D_i f(x-y)\, dy \\ D_i D_j u(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) D_i D_j f(x-y)\, dy. \end{aligned}$$

Wegen $f \in C^2$ ist offenbar auch $D_i D_j u$ stetig, daher $u \in C^2$.

(ii) Formel (4.2)

Φ hat eine Singularität bei Null. Deshalb müssen wir folgende wichtige Methode anwenden:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_x f(x-y)\, dy \\ &= \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y)\, dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y)\, dy \\ &= I_\varepsilon + J_\varepsilon \end{aligned}$$

I_ε wird mit ε klein, denn

$$|I_\varepsilon| \leq c \|\Delta f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|\, dy \leq \begin{cases} c \cdot \varepsilon^2 |\ln \varepsilon| & n = 2 \\ c \cdot \varepsilon^2 & n \geq 3 \end{cases}$$

Bei J_ε integrieren wir partiell und verwenden die Kurzschreibweisen $B_\varepsilon = B(0,\varepsilon)$, $\Gamma_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$.

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\,dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon} \Phi(y)\Delta_y f(x-y)\,dy \\ &= \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \Phi(y)\frac{\partial f}{\partial\nu}(x-y)\,dS_y - \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon} \nabla\Phi(y)\nabla_y f(x-y)\,dy \\ &= K_\varepsilon + L_\varepsilon \end{aligned}$$

K_ε wird wieder mit ε klein, denn

$$|K_\varepsilon| \le c\|\nabla f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} |\Phi(y)|\,dS_y \le \begin{cases} c\cdot\varepsilon|\ln\varepsilon| & n=2 \\ c\cdot\varepsilon & n\ge 3 \end{cases}$$

Bei L_ε integrieren wir noch einmal partiell, um $\Delta\Phi = 0$ ins Spiel zu bringen

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= -\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)f(x-y)\,dS_y + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon} \Delta\Phi(y)f(x-y)\,dy \\ &= -\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)f(x-y)\,dS_y, \end{aligned}$$

weil Φ außerhalb des Nullpunktes harmonisch ist. $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}$ berechnen wir wie folgt:

$$\nabla\Phi(y) = -\frac{1}{nv_n}\frac{y}{|y|^n}, \qquad \nu = -\frac{y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon} \text{ auf } \Gamma_\varepsilon.$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \nabla\Phi\cdot\nu = \frac{1}{nv_n}\frac{|y|^2}{\varepsilon^{n+1}} = \frac{1}{nv_n\varepsilon^{n-1}}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= -\frac{1}{nv_n\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f(x-y)\,dS_y \\ &= -\frac{1}{nv_n\varepsilon^{n-1}}\left(f(x)\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} dS_y + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f(x-y)-f(x)\,dS_y \right) \end{aligned}$$

$$= \quad -f(x) - \frac{1}{nv_n\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f(x-y) - f(x)\, dS_y$$

Hier haben wir schon

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} dS_y = nv_n\varepsilon^{n-1}$$

benutzt. Der letzte Term wird auch klein mit ε:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{nv_n\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f(x-y) - f(x)\, dS_y\right| &\leq \frac{1}{nv_n\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} |f(x-y) - f(x)|\, dS_y \\ &\leq \frac{1}{nv_n\varepsilon^{n-1}} \|\nabla f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \cdot \varepsilon \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} dS_y \\ &\leq \|\nabla f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Vollziehen wir nun den Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$, so erhalten wir

$$\Delta u(x) = -f(x),$$

was äquivalent zu (4.2) ist. □

Im Sinne dieses Satzes können wir formal schreiben

$$-\Delta\Phi = \delta_0$$

(δ_0 - Dirac-Maß oder δ-Distribution) und rechnen formal

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -\Delta_x \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} -\Delta_x \Phi(x-y) f(y)\, dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\, d\delta_x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Im Abschnitt Distributionen werden wir diese intuitive Herangehensweise präzisieren.

4.3 Mittelwertsatz und Maximumprinzip für harmonische Funktionen

Die beiden Sätze liefern den Schlüssel zur Beantwortung der Eindeutigkeitsfrage von Lösungen für Randwertprobleme bei elliptischen Gleichungen.

Satz 7 *(Mittelwertsatz für harmonische Funktionen) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in C^2(\Omega)$. Dann gilt für jede Kugel $B(x,r) \subset \Omega$*

$$u(x) = \frac{1}{|S(x,r)|} \int\limits_{S(x,r)} u(y)\, dS_y = \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} u(y)\, dy.$$

Beweis: Wir setzen

$$\varphi(r) = \frac{1}{|S(x,r)|} \int\limits_{S(x,r)} u(y)\, dS_y = \frac{1}{|S(0,1)|} \int\limits_{S(0,1)} u(x+rz)\, dS_z.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi'(r) &= \frac{1}{|S(0,1)|} \int\limits_{S(0,1)} \nabla u(x+rz) \cdot z\, dS_z \\
&= \frac{1}{|S(x,r)|} \int\limits_{S(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r}\, dS_y \\
&= \frac{1}{|S(x,r)|} \int\limits_{S(x,r)} \nabla u(y) \cdot \nu\, dS_y \\
&= \frac{1}{|S(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} \Delta u\, dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

nach der 1. Greenschen Formel. Damit ist φ konstant für alle $r > 0$, also

$$\varphi(r) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{|S(x,t)|} \int\limits_{S(x,t)} u(y)\, dS_y = u(x)$$

womit der erste Teil bewiesen ist. Die zweite Formel folgt aus der ersten

$$\int\limits_{B(x,r)} u(y)\,dy = \int_0^r \left(\int\limits_{S(x,r)} u(y) dS_y \right) dr = \int_0^r u(x)|S(x,r)|dr = u(x)|B(x,r)|.$$

mit Hilfe des Cavalieri-Prinzips. □

Die Auswirkungen des Mittelwertsatzes sind gravierend. Das sehen wir am Maximumprinzip für harmonische Funktionen.

Satz 8 *(Starkes Maximumprinzip) Eine in einem Gebiet Ω harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ nimmt ihr Maximum oder Minimum in keinem inneren Punkt von Ω an, es sei denn, u ist konstant in Ω.*

Beweis: Es sei $x_o \in \Omega$ ein Punkt mit $u(x_o) = \max\limits_{x \in \Omega} u(x) = M$. Da x_o ein innerer Punkt ist, können wir eine Kugel $B(x_o, r)$ um x_o legen, die ganz in Ω liegt. Der Mittelwertsatz liefert

$$M = u(x_o) = \frac{1}{|B(x_o,r)|} \int\limits_{B(x_o,r)} u(y)\,dy < \frac{1}{|B(x_o,r)|} M \cdot |B(x_o,r)| = M,$$

falls u irgendwo in $B(x_o, r)$ kleiner als M waere (da u stetig ist), also einen Widerspruch. Folglich muss $u(x) \equiv M$ in $B(x_o, r)$ gelten. Sei x_1 ein beliebiger anderer Punkt in Ω. Wir zeigen

$$u(x_o) = u(x_1),$$

womit der Satz bewiesen ist. Wir wenden dazu das *Kreiskettenverfahren* an. Wir verbinden x_o und x_1 durch eine ganz in Ω verlaufende Kurve (Ω ist als Gebiet zusammenhängend). Dann gibt es ein $r > 0$, so dass alle Punkte der Kurve einen Abstand größer als r von $\partial\Omega$ haben. Wir wählen nun den Schnittpunkt von $S(x_o, r)$ mit der Kurve als Mittelpunkt für die nächste Kugel mit Radius r. Nach endlich vielen solchen Schritten liegt x_1 im Inneren einer solchen Kugel. In allen Kugeln ist u konstant gleich M, also gilt dies auch für x_1. □

Bemerkungen: Es gilt also
(i) Das Maximum (Minimum) von u wird stets auf dem Rand angenommen (*Maximumprinzip*).
(ii) Ist u nicht konstant, dann wir das Maximum (Minimum) nur auf dem Rand angenommen (*starkes Maximumprinzip*).

Folgerung 1 *Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega \\ u &= g \qquad \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \tag{4.3}$$

dann folgt aus $g \geq 0$ auf Γ auch $u \geq 0$ in Ω. Ist zusätzlich g irgendwo auf Γ positiv, so gilt $u(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$.

Denn: Erstens kann u nicht negativ sein, weil sonst das Minimum nicht auf dem Rand läge. Zweitens würde $u(x_o) = 0$ mit $x_o \in \Omega$ ein inneres Minimum sein, damit $u \equiv 0$. Daraus würde aber $g \equiv 0$ folgen.

Folgerung 2 *(Eindeutigkeit) Es seien $g \in C(\Gamma)$ und $f \in C(\Omega)$ vorgegeben. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ des Problems*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega \\ u &= g \qquad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Beweis: Existieren zwei Lösungen u_1 und u_2 von (4.4), dann löst die Differenz $u_1 - u_2$ das Dirichlet-Problem (4.3) mit homogenen Randdaten $g \equiv 0$. Daraus folgt offenbar $u_1 - u_2 \equiv 0$, d.h. $u_1 = u_2$. □

Folgerung 3 *Löst u das Dirchlet-Problem (4.3) und gilt $|g(x)| \leq c$ auf Γ, dann gilt auch $|u(x)| \leq c$ in Ω.*

Folgerung 4 *Es seien u_1 und u_2 Lösungen des Dirichlet-Problems (4.3) zu g_1 und g_2. Dann folgt aus $|g_1(x) - g_2(x)| \leq \delta$ auf Γ die Eigenschaft*

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq \delta \qquad \text{in } \Omega.$$

Damit hängt die Lösung des Dirchlet-Problems stetig von den Daten ab.

Folgerung 5 *Ω sei beschränkt und $\{u_n\}$ eine Folge harmonischer Funktionen in Ω, $u_n \in C(\bar{\Omega})$. Konvergiert u_n gleichmäßig auf Γ, so auch in Ω.*

Wir betrachten nun noch das Neumann-Problem. Mit $u(x)$ löst auch $u(x) + c$ das Problem, da jede Konstante das homogene Neumann-Problem löst. Die Lösung kann also nur bis auf eine Konstante bestimmt sein. Kann die Unbestimmtheit noch größer sein ?

Lemma 3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Kreisgebiet, u harmonisch in Ω und stetig in $\bar{\Omega}$, (x_o, y_o) sei Randpunkt von Ω. Es gelte*

$$u(x,y) > u(x_o, y_o) \qquad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Die Richtung ν bilde mit der inneren Normalen an (x_o, y_o) einen spitzen Winkel. Existiert $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ in (x_o, y_o), dann

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_o, y_o) > 0.$$

Beweis: siehe Petrowski.

Bemerkungen: **(i)** Ausgehend von (x_o, y_o) muss u in Richtung ν ansteigen, deshalb scheint die Aussage auf den ersten Blick plausibel zu sein. Doch Vorsicht !

$$n = 1, \quad u(x) = x^2, \quad u(0) = 0, \quad u(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \text{aber} \quad u'(0) = 0.$$

(ii) Im Fall $n = 1$ sieht man dies sofort ein. Harmonische Funktion: $u = u(x)$ mit $u''(x) = 0$. Kreisgebiet entspricht hier einem offenen Intervall (a, b).

$$u''(x) = 0 \text{ in } (a,b) \;\Leftrightarrow\; u(x) = c_1 x + c_2$$

Dann ist entweder u konstant, oder u besitzt einen nicht verschwindenden Anstieg.

Lemma 4 *Wir setzen voraus, dass Γ in jedem Punkt von einem Kreis berührt werden kann, der ganz in Ω liegt. Ist $u \in C(\bar{\Omega})$ nicht konstant und harmonisch in Ω und nimmt u in P_o sein Minimum (Maximum) an, dann gilt in P_o:*

$$\frac{\partial u}{\partial n} < 0 \quad (> 0)$$

(n: äußere Normale), falls $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ existiert.

Beweis: Wir legen einen Kreis B von innen an $P_o = (x_o, y_o)$. Nach dem starken Maximumprinzip für Ω gilt $u(x_o, y_o) < u(x, y)$ für alle Punkte $(x, y) \in \Omega$. Der Rest folgt dann aus Lemma 3. Analog für ein Maximum. □

Satz 9 *Erfüllt Γ die Voraussetzungen von Lemma 4, dann unterscheiden sich Lösungen des Neumann-Problems nur um eine Konstante.*

Beweis: Seien u_1 und u_2 harmonisch und $\dfrac{\partial u_i}{\partial n} = f$ auf Γ. Dann ist auch $u = u_1 - u_2$ harmonisch und $\dfrac{\partial u}{\partial n} = f - f = 0$ auf Γ. Wenn u nicht konstant ist, dann liegt das Minimum nur auf Γ. Aus Lemma 4 folgt dann aber $\dfrac{\partial u}{\partial n}(P_o) \neq 0$ und damit ein Widerspruch. □

Bisher haben wir die Frage nach der Existenz einer Lösung des Dirichlet-Problems nur für Ω =Einheitskreis beantworten können. Allgemein ist diese Frage nicht einfach zu lösen. Für das folgende Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ existiert ein *Beipiel mit stetigen Randdaten $f(x)$, so dass keine Lösung des Dirchlet-Problems existiert:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Wir lassen diese Funktion um die y-Achse rotieren. Das ergibt einen sehr spitzen Trichter. Im Beispiel von Lebesgue ist Ω eine Kugel mit herausgenommenen Trichter (siehe Zachamanoglu/Thoe).

Solche zu spitze Ausschnitte muss man vermeiden, um die Existenz von Lösungen zu erhalten. Es gilt: Ist Γ hinreichend regulär und f stetig, dann existiert eine Lösung des Dirichlet-Problems. Hinreichend regulär: zum Beispiel *Kegelbedingung*: Jedes $x \in \Gamma$ kann durch einen Kegel K von außen so berührt werden, dass in einer hinreichend kleinen Umgebung $B_\varrho(x)$ gilt

$$\{x\} = \bar{\Omega} \cap K \cap B_\varrho(x),$$

d.h. der Kegel und das Gebiet haben nur den Scheitelpunkt des Kegels gemeinsam.

4.4 Die Greensche Funktion

Wir haben in 4.2 eine Darstellung der Lösung der Poisson-Gleichung hergeleitet, allerdings nur für den Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$. Hier werden wir den schwierigeren Fall eines beschränkten Gebietes Ω mit Rand Γ der Klasse C^1 behandeln, und zwar für (4.4),

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega \\ u &= g \qquad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Dazu sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$ beliebig gegeben, $\varepsilon > 0$ und $x \in \Omega$ beliebig fixiert. Wir integrieren dann über

$$V_\varepsilon = \Omega \setminus B(x, \varepsilon)$$

(ε so klein, dass $B(x,\varepsilon) \subset \Omega$). Wir erhalten

$$\int_{V_\varepsilon} u(y)\Delta\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\Delta u(y)\ dy = \int_{\Gamma\cup\Gamma_\varepsilon} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) dS_y$$

nach der zweiten Greenschen Formel. Die Integrale über Γ_ε behandelt man wieder wie im Beweis von Satz 6 und erhält für $\varepsilon \downarrow 0$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\ dS_y \to 0, \quad \int_{\Gamma_\varepsilon} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)\ dS_y \to -u(x).$$

Wegen $\Delta\Phi = 0$ für $x \neq y$ verschwindet der entsprechende Term. Deshalb ergibt sich nach $\varepsilon \downarrow 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_\Gamma \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\ dS_y - \int_\Gamma u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)\ dS_y \\ &- \int_\Omega \Phi(y-x)\Delta u(y)\ dy. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Diese Formel gilt für jedes $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Bemerkung: Rein intuitiv hätten wir (4.5) mit folgender, nicht ganz sauberer Rechnung bekommen: Wir wissen $-\Delta\Phi(y-x) = \delta_x$. Damit folgt aus

$$\int_\Omega \Delta\Phi(y-x)u(y) - \Phi(y-x)\Delta u(y)\ dy = \int_\Gamma u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\ dS_y$$

direkt (4.5).

Nun wenden wir (4.5) auf die Poisson-Gleichung an: Wegen $-\Delta u = f$ in Ω und $u = g$ auf Γ fehlt uns nur noch $\partial u/\partial\nu$ auf Γ, um u im Inneren zu bestimmen. Leider haben wir den Term $\partial u/\partial\nu$ nicht. Mit einem Trick kann dieser Term aber eliminiert werden. Wir definieren dazu eine Korrekturfunktion $\Phi^x(y)$ durch

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi^x &= 0 && \text{in } \Omega \\ \Phi^x &= \Phi(y-x) && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

und nehmen einfach an, dass diese Lösung existiert. Formal:

$$\begin{aligned} -\int\limits_\Omega \Phi^x(y)\Delta u(y)\,dy &= -\int\limits_\Omega u\Delta\Phi^x\,dy + \int\limits_\Gamma \frac{\partial\Phi^x}{\partial\nu}u - \frac{\partial u}{\partial\nu}\Phi^x\,dS_y \\ &= \int\limits_\Gamma \frac{\partial\Phi^x}{\partial\nu}u\,dS_y - \int\limits_\Gamma \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}\,dS_y \end{aligned} \tag{4.6}$$

<u>Definition:</u> Die Funktion G,

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi^x(y), \quad x,y\in\bar\Omega,\ x\neq y,$$

heißt *Greensche Funktion*. Was leistet sie (falls wir sie konstruieren können)? Addieren wir (4.5) und (4.6), so fallen die Terme mit $\partial u/\partial\nu$ weg,

$$\begin{aligned} u &= \int\limits_\Gamma u\left(\frac{\partial\Phi^x}{\partial\nu} - \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)\right)\,dS_y + \int\limits_\Omega (\Phi^x - \Phi(y-x))\Delta u\,dy \\ &= -\int\limits_\Gamma u(y)\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)\,dS_y - \int\limits_\Omega G(x,y)\Delta u(y)\,dy, \end{aligned} \tag{4.7}$$

mit

$$\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y) = \nabla_y G(x,y)\cdot\nu(y) \qquad \text{auf } \Gamma.$$

Daraus folgern wir

Satz 10 *Ist $u\in C^2(\bar\Omega)$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \textit{in } \Omega \\ u &= g && \textit{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

dann besitzt u die Darstellung

$$u(x) = -\int_\Gamma g(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)\, dS_y + \int_\Omega f(y)G(x,y)\, dy. \tag{4.8}$$

Bemerkungen: **(i)** Der Satz sagt nichts über die Existenz von u aus. Auch die Existenz von $G(x,y)$ wird angenommen.

(ii) Die Greensche Funktion wurde wie folgt konstruiert: Für festes x betrachtet als Funktion von y, gilt

$$\begin{aligned} -\Delta G &= \delta_x \qquad \text{in } \Omega \\ G &= 0 \qquad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Die Korrektur Φ^x erfolgt so, dass G die homogene Randbedingung erfüllt, was Φ selbst nicht gewährleistet. Entsprechend verfährt man auch bei anderen Randbedingungen.

Nun bleibt die Frage: Wie erhalten wir G ? Das geht nur bei einfachen Geometrien. Im letzten Kapitel haben wir bei Intervallen Ω die Fouriermethode benutzt. Weitere Beispiele sind der Halbraum und die Kugel.

1. Greensche Funktion für den Halbraum - Spiegelungsmethode

$$\Omega = \{x = (x_1, ..., x_n) |\, x_n > 0\}$$

Wir spiegeln den Punkt x an der x_n-Achse und erhalten den Punkt $\tilde{x} = (x_1, ..., -x_n)$. Als Ansatz für die Greensche Funktion wählen wir

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x}).$$

Da $\tilde{x}$ außerhalb von Ω liegt, besitzt $\Phi(y-\tilde{x})$ keine Singularität in Ω. Somit gilt

$$\Delta_y G(x,y) = \Delta_y \Phi(y-x) - \Delta_y \Phi(y-\tilde{x}) = -\delta_x$$

und auf Γ

$$G(x,y) = \Phi\begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ ... \\ 0 - x_n \end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ ... \\ 0 + x_n \end{pmatrix} = 0,$$

da aus der Radialsymmetrie der Fundamentallösung unmittelbar die Symmetrie bezüglich einzelner Koordinaten folgt.

Spezialfall $n = 2$:

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}(\ln\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2} - \ln\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2+x_2)^2})$$

Wir gehen nun besser zu den gebräuchlichen Variablenbezeichnungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

über (man bezeichnet die Integrationsvariablen meist mit griechischen Buchstaben).

$$G(x,y,\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}(\ln\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2} - \ln\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta+y)^2})$$

Für die Normalenableitung erhalten wir

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = -D_\eta G = \frac{1}{\pi}\frac{-y}{(\xi-x)^2+y^2}.$$

Wir betrachten nun die Lösung u von

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0) &= g(x) && \text{in } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aus (4.8) folgt

$$u(x,y) = -\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y,\xi,0)\,d\xi$$

und damit die *Poissonsche Integralformel für die Halbebene.*

$$u(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yg(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}\,d\xi.$$

Ähnliche Formeln ergeben sich für höherdimensionale Halbräume (Strauss, Evans):

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

$$u(x,y) = \frac{2x_n}{nv_n}\int_{\partial\Omega} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\,dy, \qquad x \in \bar{\Omega}$$

Definition: Die Funktion

$$K(x,y) = \frac{2x_n}{nv_n}|x-y|^{-n}$$

heißt *Poissonscher Kern für den Halbraum.*

2. Greensche Funktion für die Kugel

Auch hier führt die Spiegelungsmethode zum Ziel.
Definition: Es sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann heißt der Punkt

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$$

Spiegelpunkt zu x.

Wir machen wieder den Ansatz

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi^x(y).$$

Die Korrekturfunktion wird nun wieder mit Hilfe des Spiegelungspunktes konstruiert. Dabei benutzt man, dass die Funktion

$$\Phi^x(y) = \Phi(|x|(y-\tilde{x}))$$

wieder harmonisch ist. Auf dem Rand der Kugel $y \in S(0,1)$ erhalten wir

$$|x|^2|y-\tilde{x}|^2 = |x|^2(1-2y\cdot x\frac{1}{|x|^2}+\frac{1}{|x|^2}) = |x|^2 - 2y\cdot x + |y|^2 = |x-y|^2.$$

Da Φ nur vom Betrag des Arguments abhängt, gilt deshalb für $y \in S(0,1)$

$$\Phi^x(y) = \Phi(|x|(y-\tilde{x})) = \Phi(y-x)$$

und daher hat unsere Greensche Funktion wieder homogene Randdaten.

Definition: Die Greensche Funktion für die Kugel ist

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(|x|(y-\tilde{x}) \qquad (n \geq 2).$$

Wir betrachten nun das Dirchlet-Problem auf der Einheitskugel

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \qquad |x| < 1 \\ u &= g, \qquad |x| = 1. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Aus (4.8) folgt

$$u(x) = -\int\limits_{|y|=1} g(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)\, dS_y.$$

Wir wissen bereits aus der Übung

$$\nabla|y| = \frac{y}{|y|}.$$

Weiter geht es wie folgt:

$$\nabla\Phi(y) = \frac{1}{n(n-2)v_n}\nabla\frac{1}{|y|^{n-2}} = -\frac{1}{nv_n}\frac{y}{|y|^n},$$

also

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) = -\frac{1}{nv_n}\frac{y\cdot(y-x)}{|y-x|^n}.$$

Für den zweiten Term ergibt sich

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(|x|(y-\tilde{x})) = -\frac{1}{nv_n}|x|\frac{y\cdot|x|(y-\tilde{x})}{|x|^n|y-\tilde{x}|^n} = -\frac{1}{nv_n}\frac{y\cdot(|x|^2y-x)}{|y-x|^n}.$$

Dabei haben wir wieder $|x||y-\tilde{x}| = |y-x|$ auf $S(0,1)$ benutzt. Für G folgt daraus

$$\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y) = -\frac{1}{nv_n}\frac{y\cdot(y-x) - y\cdot(|x|^2y-x)}{|y-x|^n} = -\frac{1}{nv_n}\frac{1-|x|^2}{|y-x|^n},$$

woraus wir die Formel

$$u(x) = \frac{1-|x|^2}{nv_n}\int\limits_{|y|=1}\frac{g(y)}{|y-x|^n}\, dS_y$$

ableiten. Für eine Kugel mit Radius r folgt durch Transformation

$$u(x) = \frac{r^2-|x|^2}{nv_n}\int\limits_{|y|=r}\frac{g(y)}{|y-x|^n}\, dS_y$$

die *Poissonsche Formel für die Kugel*. Diese hatten wir für den Fall $n=3$ bereits am Ende des dritten Kapitels angegeben.