Nehmen wir noch den Fall: $k = \nu + 1$, $l = \mu$.

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}\, dxdy = \int_{K_2} \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}\, dxdy + \int_{K_3} \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}\, dxdy$$

Hier gilt

$$\frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} = -\frac{1}{h}, \qquad \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} = \frac{1}{h},$$

also

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}\, dxdy = 2 \cdot (-\frac{1}{h^2}) \cdot \frac{h^2}{2} = -1.$$

Analog rechnet man in den anderen Fällen.

<u>Wir kommen nun zu einem wichtigen Problem:</u>

Um die Matrix A_h aufstellen zu können, müssen wir die Funktionen $\varphi_{\nu\mu}$ durchnummerieren von 1 bis $(M-1)^2$. Je nachdem, wie wir dies tun, wird die Matrix A_h eine mehr oder weniger komplizierte Gestalt haben.Um diese Dinge in den Griff zu bekommen, muss man aber etwas mehr Aufwand treiben.

<u>Stark vereinfachtes Beispiel:</u>

Wir vernetzen Ω so grob, dass ein direktes Durchrechnen ohne weitere Kenntnisse gerade noch möglich ist. Dazu verwenden wir 4 innere Knoten und haben also 4 Basisfunktionen:

$$w_1 = \varphi_{11},\; w_2 = \varphi_{21},\; w_3 = \varphi_{22},\; w_4 = \varphi_{12}$$

Zu berechnen haben wir die Matrix A_h. Die Formeln dazu haben wir schon bereit gestellt. Demnach stehen auf der Hauptdiagonalen lauter Vieren. Bei den Elmenten a_{14} und a_{22} haben wir den Fall $k = \nu$, $l = \mu + 1$. Laut unserer Tabelle ergibt sich der Wert -1. a_{24} ist Null, da der gemeinsame Träger die leere Menge ist. a_{13} ist der Fall $k = \nu + 1$, $l = \mu + 1$. Hier ergibt sich ebenfalls der Wert Null. Bleibt noch a_{12} und a_{34}. Diese stellen die Fälle $k = \nu + 1$, $l = \mu$ und $k = \nu - 1$, $l = \mu$ dar. Beide liefern den Wert -1. Zusammengefasst erhalten wir

$$A_h = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Gegeben sei außerdem die rechte Seite $f \equiv 1$ in Ω. Wir müssen noch die Elemente f_i des Vektors $\underline{f}$ berechnen:

$$f_i = \int_\Omega f(x,y) w_i(x,y)\; dxdy = \int_\Omega w_i(x,y)\; dxdy$$

Dieser Ausdruck ist aber gerade das Volumen des Hütchens. Die Grundfläche besteht aus 6 Dreiecken mit Flächeninhalt $h^2/2$. Die Höhe der Pyramide ist 1. Nach der Formel $V_p = \frac{1}{3}\cdot$Grundfläche erhalten wir

$$f_i = V_p = 6 \cdot \frac{h^2}{6} = h^2.$$

und damit das folgende Gleichungssystem für $\underline{u}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In unserem Fall ist $h = 1/3$, also steht rechts im Vektor immer $1/9$. Offenbar muss die Lösung total symmetrisch sein. Man erhält also die Lösung $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1/18$ und damit das Ergebnis

$$u_h(x,y) = \frac{1}{18}(w_1(x,y) + w_2(x,y) + w_3(x,y) + w_4(x,y)).$$

In der Übung werden wir noch auf das Lemma von Céa eingehen.

Kapitel 7

Parabolische Differentialgleichungen

7.1 Das erste Randwertproblem und das Maximumprinzip

Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitgleichung in einem krummlinig berandeten Viereck: $\varphi_1 < \varphi_2$ stetig;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{in } (x,t) \in G. \tag{7.1}$$

$$u(x,t) = f(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma \tag{7.2}$$

Dabei sei

$$\Gamma = \{(x,t) \,|\, t = t_0\} \cup \{(x,t) \,|\, x = \varphi_1(t)\} \cup \{(x,t) \,|\, x = \varphi_2(t)\}.$$

Außerdem sei f stetig, d.h. wir fordern die Verträglichkeit der Randbedingungen mit den Anfangsbedingungen.

Satz 19 *Sei u Lösung von (7.1), stetig auf $\bar{G}$. Dann nimmt u sein Minimum und Maximum auf Γ an, also auf der Grundlinie $t = t_0$ oder auf den seitlichen Begrenzungen von G.*

Beweis: Nach Priwalow. Wir nehmen das Maximum. Sei

$$\begin{aligned} M &= \max_G u(x,t) \\ m &= \max_\Gamma u(x,t) \end{aligned}$$

Annahme: $M > m$ (also auf $G \setminus \Gamma$ realisiert).

$$M = u(x^*, t^*) \;\Rightarrow\; t_o < t^*,\, \varphi_1(t^*) < x^* < \varphi_2(t^*)$$

Wir definieren

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{M-m}{4l^2}(x-x^*)^2$$

mit

$$l := \max_{t_o \le t \le T} \{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\}.$$

Auf Γ gilt:

$$v \le m + \frac{M-m}{4} = \frac{M}{4} + \frac{3m}{4} < M.$$

Dagegen gilt

$$v(x^*, t^*) = M,$$

also nimmt auch v sein Maximum nicht auf Γ an. Das Maximum von v werde in (x_1, t_1) angenommen. Wieder gilt

$$t_o < t_1,\, \varphi_1(t_1) < x_1 < \varphi_2(t_1).$$

Aus der Theorie der Extremwerte wissen wir

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \le 0$$

und

$$\frac{\partial v}{\partial t} \ge 0.$$

In der letzten Zeile steht nur ein "$\ge$", da $t_1 = T$ möglich ist. Somit gilt in (x_1, t_1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ge 0.$$

Wir können aber auch anders rechnen:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{M-m}{2l^2} = \frac{M-m}{2l^2} < 0,$$

womit sich offenbar ein Widerspruch ergibt. □

Folgerung 1 Die Lösung des ersten Randwertproblems ist eindeutig. Sind u_1 und u_2 Lösungen von (7.1)-(7.2), dann löst $u_1 - u_2$ das Problem mit homogenen Daten. Nach dem Maximumprinzip besitzt die homogene Aufgabe aber nur die Lösung $u \equiv 0$.

Folgerung 2 Die Lösung des ersten Randwertproblems hängt stetig von den Daten ab. Seien u_1 und u_2 Lösungen von (7.1)-(7.2) zu den rechten Seiten f_1 und f_2. Dann gilt nach dem Maximumprinzip

$$\|u_1 - u_2\|_{C(\bar{G})} \leq \|f_1 - f_2\|_{C(\Gamma)}.$$

Bemerkung: Für ein Rechteck G haben wir früher eine Lösung mit der Fouriermethode hergeleitet. Nach Folgerung 1 ist dies die einzige.

7.2 Das Cauchyproblem

Im Unterschied zu früheren Definitionen des Cauchyproblems nennt man auch das folgende Cauchyproblem für die Wärmeleitgleichung. Gegeben sei eine Funktion $\varphi \in C(\mathbb{R})$, die zusätzlich beschränkt sein soll. Gesucht wird die Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{in } (-\infty, \infty) \times (0, \infty) \\ u(x,0) &= \varphi(x) \qquad \text{in } (-\infty, \infty), \end{aligned} \tag{7.3}$$

wobei u stetig und beschränkt sein soll für $t \geq 0$.

Satz 20 *Die Lösung von (7.3) ist in der Klasse der beschränkten Funktionen eindeutig bestimmt.*

Beweis: Sei $\varphi \equiv 0$, u Lösung von (7.3), $|u(x,t)| \leq M$ für $0 \leq t \leq T$ ($T > 0$ beliebig, aber fest). Zu zeigen: $u \equiv 0$. Sei dazu (x_0, t_0) fest mit $t_0 > 0$, $varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Wir zeigen $|u(x_0, t_0)| \leq \varepsilon$. Dazu betrachten wir

$$w(x,t) = 2t + x^2 \;\Rightarrow\; w_t = w_{xx}.$$

Damit lösen natürlich auch die Funktionen

$$\frac{\varepsilon w}{w(x_0,t_0)} + u, \qquad \frac{\varepsilon w}{w(x_0,t_0)} - u$$

die Wärmeleitgleichung. Wir betrachten nun das Rechteck

$$0 \leq t \leq T, \qquad |x| \leq \sqrt{\frac{Mw(x_0,t_0)}{\varepsilon}} + |x_0|.$$

In diesem Rechteck sind beide Lösungen nichtnegativ. Das sieht man so: Für $t = 0$ gilt $u \equiv 0$. Für $|x| = \sqrt{\frac{Mw(x_0,t_0)}{\varepsilon}} + |x_0|$ gilt

$$\frac{\varepsilon w}{w(x_0,t_0)} \geq \frac{\varepsilon x^2}{w(x_0,t_0)} \geq \frac{\varepsilon}{w(x_0,t_0)} \cdot \frac{Mw(x_0,t_0)}{\varepsilon} = M.$$

Nach dem Maximumprinzip sind daher die beiden Lösungen nichtnegativ im gesamten Rechteck. Es gilt also:

$$\frac{\varepsilon w}{w(x_0,t_0)} + u \geq 0, \qquad \frac{\varepsilon w}{w(x_0,t_0)} - u \geq 0,$$

also

$$|u| \leq \frac{\varepsilon w}{w(x_0,t_0)}.$$

Damit gilt speziell im Punkt (x_0,t_0)

$$|u(x_0,t_0)| \leq \varepsilon.$$

Wir lassen nun ε gegen 0 gehen und erhalten $u(x_0,t_0) = 0$. Da der Punkt (x_0,t_0) beliebig gewählt war, gilt $u \equiv 0$. □

Bemerkung: Die Eindeutigkeit lässt sich auch unter einer schwächeren Voraussetzung zeigen: Sei u Lösung von (7.3), $\varphi \equiv 0$, $f(x) = \max_{0 \leq t \leq T} |u(x,t)|$ und $T > 0$ fest. Existiert ein $c > 0$, so dass

$$f(x) \cdot e^{-cx^2} \to 0, \qquad |x| \to infty,$$

dann gilt $u \equiv 0$, d.h. die Eindeutigkeit. Der Beweis steht in Petrowski S.268. Ohne Wachstumsbeschränkung ist die Lösung nicht eindeutig.

Satz 21 *Sei u beschränkte Lösung von (7.3) und $|\varphi(x)| \leq \eta$. Dann gilt auch $|u(x,t)| \leq \eta$.*

Beweisidee: Wie beim letzten Satz. Wählen nur anstelle von $\dfrac{\varepsilon w}{w(x_0,t_0)}$ nun die Funktion $\dfrac{\varepsilon w}{w(x_0,t_0)} + \eta$ und lassen dann wieder ε gegen Null streben. □

Die Lösung von (7.3) lässt sich auch explizit angeben:

Satz 22 *Die eindeutig bestimmte Lösung u von (7.3) ist*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi \quad (t > 0). \tag{7.4}$$

Diese Darstellung wird auch als Poissonsches Integral bezeichnet.

Beweis: Da φ beschränkt ist, konvergiert dieses Integral offensichtlich für $t > 0$ (man überlege sich das selbst). Diferenzieren wir das Integral beliebig oft nach t oder x, so konvergiert das Integral ebenfalls (dito). Diese Konvergenz ist gleichmäßig in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes (x,t). Wir können daher die Differentiation unter das Integral ziehen.

Die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

erfüllt die Wärmeleitgleichung (siehe 1. Übung Aufgabe 2a).Man überlegt sich leicht, dass daher auch u der Wärmeleitgleichung genügt. Wesentlich interessanter sind die Fragen, ob die Lösung beschränkt ist und ob sie die Anfangsbedingung erfüllt. Wir definieren

$$M := \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$$

und erhalten

$$|u(x,t)| \leq \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = M$$

Dabei haben wir $y = \dfrac{(x-\xi)}{2\sqrt{t}}$ substituiert und die Formel für das Gaußsche Fehlerintegral benutzt. Interpretieren Sie die eben gefundene Lösung zu $\varphi \equiv M$ physikalisch !

Kommen wir nun zur Anfangsbedingung. Wir verzichten hier auf die übliche Epsilontik und schreiben nur die Grundidee auf. Die Substitution $\xi = x + 2\sqrt{t}y$ führt zu

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\sqrt{t}y) e^{-y^2}\, dy.$$

Außerdem gilt

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-y^2}\, dy.$$

Ist N hireichend groß, dann gilt

$$u(x,t) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N} \varphi(x + 2\sqrt{t}y) e^{-y^2}\, dy.$$

und natürlich auch

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N} \varphi(x) e^{-y^2}\, dy.$$

jeweils bis auf ein ε. Es gilt also

$$|u(x,t) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N} (\varphi(x + 2\sqrt{t}y - \varphi(x)) e^{-y^2}\, dy + 2\varepsilon.$$

Der Ausdruck $\varphi(x + 2\sqrt{t}y - \varphi(x))$ strebt aber für $t \to 0$ gleichmäßig gegen 0 auf $[-N, N]$. Für hinreichend kleines t gilt daher

$$|u(x,t) - \varphi(x)| < 3\varepsilon.$$

Wird N beliebig groß, wird ε beliebig klein, somit gilt $u(x, 0) = \varphi(x)$. $\square$

Bemerkung: Sei

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $t > 0$. Dann gilt

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} \varphi(x) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Damit gilt $u > 0$ für beliebig kleine Zeit und beliebig entferntes x. Somit widerspricht die Wärmeleitgleichung in diesem Punkt der Realität.

7.3 Das Cauchyproblem für höhere Ortsdimension

Sei $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$. Als Cauchyproblem bezeichnen wir dann analog: Gesucht ist eine Lösung u mit

$$\begin{aligned} u_t = \Delta u \qquad & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = \varphi(x) \qquad & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{7.5}$$

sowie u_t, Δu stetig für $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, u stetig für $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Satz 23 *Ist $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ beschränkt, so gibt es genau eine beschränkte Lösung u von (7.5). Diese ist gegeben durch*

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Der Beweis der Eindeutigkeit erfolgt wieder analog zum eindimensionalen Fall. Man beweist zunächst das Maximumprinzip und folgert daraus die Eindeutigkeit. Die Gültigkeit der Lösungsdarstellung wird analog zum letzten Satz gezeigt.

Bemerkung: Die Funktion

$$\Gamma(x,\xi,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}$$

heißt Grundlösung der n-dimensionalen Wärmeleitgleichung oder auch *Fundamentallösung* oder *Singularitätenlösung.*

7.4 Schwache Lösungen in $W_2^{1,0}(Q)$

Wir betrachten hier als Muster für parabolische Aufgaben das dritte Randwertproblem:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + c_0 u &= f && \text{in } Q = \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= g && \text{auf } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \end{aligned} \tag{7.6}$$

Dabei sind folgende Funktionen gegeben:

- $c_0 \in L^\infty(Q)$, $c_0 = c_0(x,t)$
- $f \in L^2(Q)$, $f = f(x,t)$
- $\alpha \in L^\infty(\Sigma)$, $\alpha = \alpha(x,t)$, $\alpha \geq 0$
- $g \in L^2(\Sigma)$, $g = g(x,t)$

Die Behandlung von (7.6) ist schwieriger als im elliptischen Fall, erfordert mehrere Techniken und dem entsprechend mehrere Typen von Räumen. Wir beginnen mit den gebräuchlisten.

Definition: Wir definieren den Sobolevraum

$$W_2^{1,0}(Q) = \{u \in L^2(Q)| \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(Q) \ \forall i = 1,..,n\}$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W_2^{1,0}} = \left(\int_0^T \int_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2)\right)^{1/2}.$$

Die Ableitungen sind als schwache Ableitungen zu verstehen.

Grundlegende Eigenschaften und vieles mehr findet man in dem Buch von Ladyzhenskaya/Solonnikov/Uraltseva. Hier nur soviel: Dieser Raum ist versehen mit dem natürlichen Skalarprodukt ein Hilbertraum.

Definition: Wir bezeichnen mit $W_2^{1,1}$ den Sobolevraum

$$W_2^{1,1}(Q) = \{u \in L^2(Q)| \ \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(Q) \ \forall i = 1,..,n\}$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W_2^{1,0}} = \left(\int_0^T \int_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2 + u_t^2)\right)^{1/2}.$$

Auch dieser Raum wird mit dem entsprechenden Skalarprodukt zum Hilbertraum. Wir können nun (7.6) analog zum elliptischen Fall in eine Variationsformulierung überführen. Dazu multiplizieren wir die Wärmeleitgleichung mit einer Funktion $v \in W_2^{1,1}(Q)$ und integrieren über Q. Wir tun das zunächst *formal*, denn noch wissen wir nicht, in welchem Sinne (7.6) durch u gelöst wird. Wir nehmen zunächst eine klassische Lösung an.

$$\int_0^T \int_\Omega u_t v \, dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta uv \, dxdt + \int_0^T \int_\Omega c_0 uv \, dxdt = \int_0^T \int_\Omega fv \, dxdt$$

Da $v \in W_2^{1,1}(Q)$ gilt, können wir bezüglich t und x partiell integrieren

$$\int_\Omega (u(x,T)v(x,T) - u(x,0)v(x,0)) - \int_Q uv_t + \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_Q \nabla u \nabla v + \int_Q c_0 uv = \int_Q fv$$

In dieser Formulierung treten die Werte $u(x,0)$ und $u(x,t)$ auf. Weil y bezüglich t nur aus L^2 ist, sind diese Werte eigentlich gar nicht definiert. Wegen $u(x,0) = u_0(x)$ können wir u_0 einsetzen. Dieser Trick hilft uns aber bei $u(x,T)$ nicht weiter. Bei v sieht das etwas anders aus. Die Existenz der ersten schwachen Ableitung bezüglich der Zeit sichert nach den Spursätzen, dass die Werte $v(x,0)$ und $v(x,T)$ wohldefiniert in $L^2(Q)$ sind. Daher ist es sinnvoll, $v(x,T) = 0$ zu fordern. Damit schalten wir auch den Wert $u(x,T)$ aus. Wir ersetzen noch die Normalenableitung durch $g - \alpha u$ und erhalten

$$-\int_Q uv_t + \int_Q \nabla u \nabla v + \int_Q c_0 uv + \int_\Sigma \alpha uv = \int_Q fv + \int_\Sigma gv + \int_\Omega u_0 v(.,0) \quad (7.7)$$

<u>Definition:</u> $u \in W_2^{1,0}(Q)$ heißt schwache Lösung von (7.6), wenn die Beziehung (7.7) für alle Funktionen $v \in W_2^{1,1}(Q)$ erfüllt ist, die zusätzlich der Bedingung $v(x,T) = 0$ genügen.

Die folgende Aussage wird im Buch von Ladyzhenskaya/Solonnikov/Uraltseva bewiesen:

Satz 24 *Unter den angegebenen Voraussetzungen besitzt (7.6) genau eine schwache Lösung in* $W_2^{1,0}(Q)$. *Es existiert eine Konstante* $c_1 > 0$, *so dass*

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q)} \leq c_1(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)})$$

gilt, für alle $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(Q)$, $g \in L^2(\Sigma)$. *Dabei hängt die Konstante* c_1 *natürlich <u>nicht</u> von* u_0, f *und* g *ab.*

<u>Folgerung:</u> Die Abbildung $(u_0, f, g) \mapsto u$ ist linear und stetig von $L^2(\Omega) \times L^2(Q) \times L^2(\Sigma)$ in $W_2^{1,0}(Q)$.

Auf den ersten Blick sieht das Ganze gut aus. Es gibt aber Schwachstellen. Für viele Anwendungen (z.B. bei der Optimalsteuerung) benötigt man Funktionen v mit $v(x,T) \neq 0$. Außerdem möchte man als v gern weniger reguläre Funktionen verwenden. Deshalb betrachtet man ein neues Konzept.

7.5 Schwache Lösungen in $W(0,T)$

7.5.1 Abstrakte Funktionen

... sind gar nicht so abstrakt.

Definition: Eine Abbildung $u = u(t)$ von $[a,b]$ in einen Banachraum X heißt *abstrakte Funktion.*

Beispiele:

1. $X = \mathbb{R}$ $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ reelle Funktion einer Veränderlicher

2. $X = \mathbb{R}^n$ $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ vektorwertige Funktion

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \ldots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

3. $X = H^1(\Omega)$ $u : [a,b] \to H^1(\Omega)$
In diesem Fall ist $u(t)$ für jedes t ein Element von $H^1(\Omega)$, also selbst wieder eine Funktion von $x \in \Omega$. Folglich

$$u(t) = u(.,t) \quad \text{mit } u(.,t) = u(x,t)$$

Man beachte, dass $u = u(x,t)$ aus $W_2^{1,0}(Q)$ in gewissem Sinn diese Gestalt besitzt.

Definition: $C([a,b],X)$ = Raum der stetigen Funktionen $u : [a,b] \to X$ mit Norm

$$\|u\|_{C([a,b],X)} = \max_{t\in[a,b]} \|u(t)\|_X.$$

Für $u \in C([a,b],X)$ = kann man das Riemann-Integral

$$\int_a^b u(t)\, dt$$

als Grenzwert Riemannscher Integralsummen

$$\sum_{i=1}^{k} u(\xi_i)\Delta t_i, \qquad \Delta t_i = t_i - t_{i-1},\ \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

definieren.

Definition: Sei $u : [a,b] \to X$ abstrakte Funktion. Gibt es endlich viele messbare Mengen $M_i \subset [a,b]$, disjunkt mit $\bigcup M_i = [a,b]$ und endlich viele Elemente $u_i \in X$, so dass $u(t) = u_i$ auf M_i, so heißt u *Treppenfunktion.*

Definition: Eine abstrakte Funktion $u : [a,b] \to X$ heißt *messbar*, wenn es eine Folge $\{u_k(t)\}$ von Treppenfunktionen $u_k : [a,b] \to X$ gibt mit

$$u(t) = \lim_{k\to\infty} u_k(t), \quad \text{f.ü. auf } [a,b].$$

Definition: $L^p([a,b],X)$ = Raum aller messbaren abstrakten Funktionen $u : [a,b] \to X$ für welche

$$\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, dt < \infty \quad (1 \le p < \infty)$$

gilt. Dieser Raum wird mit der Norm

$$\|u\|_{L^p([a,b],X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p}$$

versehen.Das hier auftretende *Bochner-Integral* ist ein Pendant zum Lebesgue-Integral. Es wird analog zum Lebsgue-Integral über Treppenfunktionen definiert:

$$\int_a^b u(t) \, dt = \lim_{k\to\infty} \int_a^b u_k(t) \, dt$$

Der Wert des Integrals ist wieder ein Element von X. Für Treppenfunktionen definiert man das Integral

$$\int_a^b u(t) \, dt = \sum_{i=1}^m u_i \cdot \text{mes}(M_i).$$

Für $X = \mathbb{R}$ ist das Bochnerintegral identisch mit dem Lebesgue-Integral.

Beispiel: $X = H^1(\Omega)$, $L^2([0,T], H^1(\Omega))$ mit Elementen $y = y(.,t) = y(x,t)$
Die Norm ist definiert durch

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2([0,T],X)} &= \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \, dt\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^T \int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 \, dx dt\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass die Normen in $W_2^{1,0}(Q)$ und $L^2([0,T],H^1(\Omega))$ übereinstimmen. Sind die Räume identisch ?

In der Tat sind sie zueinander isomorph, d.h.

$$W_2^{1,0}(Q) \cong L^2([0,T],H^1(\Omega))$$

(Jede Funktion aus dem einen Raum wird durch Abänderung auf einer Menge vom Maß Null zu einer Funktion des anderen Raumes. Die Beweiskonstruktion steht in Hill/Phillips.)

7.5.2 Abstrakte Funktionen und Wärmeleitung

Wir multiplizieren (7.6) mit $v \in H^1(\Omega) = V$ und halten $t \in (0,T)$ fest. Nach Integration über Ω ergibt sich

$$\int_\Omega u_t(t)v = -\int_\Omega \nabla u(t)\nabla v + \int_\Omega (f(t) - c_0(t)u(t))v + \int_\Gamma (g(t) - \alpha(t)u(t))v, \quad (7.8)$$

wobei wir überall die Abhängigkeit von x unterdrückt haben.

Wegen $L^2(Q) \cong L^2([0,T],L^2(\Omega))$ und analog $L^2(\Sigma) \cong L^2([0,T],L^2(\Gamma))$ können wir f, g und u als abstrakte Funktionen auffassen. Für festes $t \in (0,T)$ wird auf der rechten Seite jedem $v \in H^1(\Omega)$ linear und stetig eine reelle Zahl zugeordnet. Daher gilt

$$\int_\Omega u_t(t)v\; dx = \langle F(t), v\rangle \quad (7.9)$$

mit einem gewissen $F = F(t) \in H^1(\Omega)^* = V^*$, welches durch die rechte Seite von (7.8) definiert ist. Ist u schwache Lösung aus $W_2^{1,0}$, dann können wir u auch als abstrakte Funktion $u \in L^2([0,T],H^1(\Omega))$ auffassen. Man kann nachrechnen, dass deshalb

$$\int_0^T \|F(t)\|^2_{H^1(\Omega)^*}\; dt < \infty$$

gilt, d.h. $F \in L^2([0,T],H^1(\Omega)^*)$. Durch Vergleich mit der linken Seite von (7.9) sollte daher gelten

$$u_t \in L^2([0,T],H^1(\Omega)^*).$$

Nur wissen wir nicht, was u_t sein soll ...

7.5.3 Vektorwertige Distributionen

Wir gehen aus vom Raum $U = L^2([0,T],V)$ und haben als Hintergrund den Raum $V = H^1(\omega)$ im Auge. Ist $u \in U$gegeben, so definieren wir die *vektorwertige Distribution* $T : C_o^\infty(0,T) \to V$ durch

$$T\varphi := \int_0^T u(t)\varphi(t)\ dt$$

Die Ableitung $T'\varphi$ wird wie im reellwertigen Fall durch

$$T'\varphi := -\int_0^T u(t)\varphi'(t)\ dt$$

erklärt, T'' durch

$$T''\varphi := \int_0^T u(t)\varphi''(t)\ dt$$

usw. Es existiere nun eine abstrakte Funktion $w = w(t)$, $w : (0,T) \to V$, so dass

$$-\int_0^T u(t)\varphi'(t)\ dt = \int_0^T w(t)\varphi(t)\ dt \qquad \forall \varphi \in C_o^\infty(0,T).$$

Dann nennen wir T' eine reguläre Distribution und können T' mit w identifizieren, d.h.

$$u'(t) = w(t).$$

Auf diese Weise könnte man betrachten

$$\{u \in L^2([0,T],V)|\ u' \in L^2([0,T],V)\}.$$

Diese Konstruktion wäre aber zu eng und würde uns nicht weiter bringen. Am Ende des letzten Abschnittes sahen wir, dass $u_t \in L^2([0,T],H^1(\Omega)^*)$ sinnvoll ist.

Definition: Wir definieren den Hilbertraum

$$W(0,T) := \{u \in L^2([0,T],V)|\ u' \in L^2([0,T],V^*)\}$$

und versehen ihn mit der Norm

$$\|u\|_{W(0,T)} = \left(\int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V^*}^2)\ dt\right)^{1/2}$$

und dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{W(0,T)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V \, dt + \int_0^T (u'(t), v'(t))_{V^*} \, dt.$$

Zum Verständnis des Weiteren benötigen wir die Konstruktion des sogenannten *Gelfandschen Dreiers.*In unserem Anwendungsfall sieht die Situation wie folgt aus $V = H^1(\Omega)$ ist bekanntlich stetig und dicht eingebettet in $H = L^2(\Omega)$. Den Raum H^* identifizieren wir nach dem Satz von Riesz wieder mit H, aber den Raum V^* nicht mit V. Jedes Element $f \in H$ kann durch

$$v \mapsto (f, h)_H \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$$

als lineares und stetiges Funktional auf V aufgefasst werden. In diesem Sinne gilt also auch $f \in V^*$ und damit

$$V \subset H = H^* \subset V^*.$$

Man zeigt nun, dass die Einbettung $H \subset V^*$ ebenfalls dicht und stetig ist. Dies wird schön in Wloka (S.253 ff) gezeigt. Die Kette stetiger und dichter Einbettungen

$$V \subset H \subset V^*.$$

heißt *Gelfandscher Dreier*. Als Nebenprodukt der Theorie ergibt sich, dass Funktionale $\varphi \in V^*$ genau dann stetig auf H fortgesetzt werden können (beachte: $\varphi \in V^*$ sind eigentlich nur auf dem kleineren Raum V definiert), wenn φ die Form

$$\varphi(v) = (f, v)_H$$

mit einem festen $f \in H$ besitzt. Im Anwendungsfall $V = H^1(\Omega)$ bedeutet das

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)^*$$

und $\varphi \in H^1(\Omega)^*$ ist genau dann stetig fortsetzbar auf $L^2(\Omega)$ wenn gilt

$$\varphi(v) = \int_\Omega f v \, dx$$

mit einem gewissen $v \in L^2(\Omega)$.

Der eigentliche Sinn der Einführung des Raumes $W(0, T)$ besteht in der Gültigkeit der folgenden Aussagen (bei beliebigen Gelfandschen Dreier):

Satz 25 *Jedes $u \in W(0,T)$ kann (nach Abänderung auf einer Menge vom Maß Null) als Funktion aus $C([0,T],H)$ angenommen werden. In diesem Sinne gilt die Einbettung $W(0,T) \subset C([0,T],H)$, und diese Einbettung ist stetig. (siehe Lions)*

In unserem Spezialfall ist $H = L^2(\Omega)$. Es gilt daher speziell $u(0) \in L^2(\Omega)$ und auch $u(T) \in L^2(\Omega)$ für Elemente u aus $W(0,T)$.

Satz 26 *In $W(0,t)$ gilt die Formel der partiellen Integration*

$$\int_0^T (u'(t), v(t))_{V,V^*}\, dt = (u(T), v(T))_H - (u(0), v(0))_H - \int_0^T (u(t), v'(t))_{V,V^*}\, dt$$

$(u, v \in W(0,T))$.

Folgerung: Es gilt die oft nützliche Beziehung

$$\int_0^T (u'(t), u(t))_{V,V^*}\, dt = \frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(0)\|_H^2$$

Bemerkung: Man lässt in der Regel die lästige Indizierung $(\ ,\ )_{V,V^*}$ weg und schreibt einfach

$$(\varphi, v) \qquad \varphi \in V^*,\ v \in V$$

Die Berechtigung liegt darin, dass bei $\varphi \in H$ automatisch das Skalarprodukt in H dasteht.

7.5.4 Zugehörigkeit schwacher Lösungen aus $W_2^{1,0}(Q)$ zu $W(0,T)$

Wir wollen nun klären, ob schwache Lösungen aus $W_2^{1,0}(Q)$ (die nach Satz 24 existieren) mit Elementen aus $W(0,T)$ identfiziert werden können. Dazu betrachten wir wieder die Gleichung (7.6)

$$\begin{aligned}
u_t - \Delta u + c_0 u &= f && \text{in } Q = \Omega \times (0,T)\\
u(x,0) &= u_0(x) && \text{in } \Omega\\
\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= g && \text{auf } \Sigma = \Gamma \times (0,T)
\end{aligned}$$

mit den im Abschnitt 7.4 getroffenen Voraussetzungen, $u \in W_2^{1,0}(Q)$ sei die schwache Lösung von (7.6). Damit gilt

$$\begin{aligned} -\int_Q uv_t\, dxdt &= -\int_Q \nabla u \nabla v\, dxdt - \int_Q c_0 uv\, dxdt - \int_\Sigma \alpha uv\, dSdt \\ &\quad + \int_\Omega u_0 v(0)\, dx + \int_Q fv\, dxdt + \int_\Sigma gv\, dSdt \end{aligned}$$

für alle $v \in W_2^{1,1}(\Omega)$ mit $v(T) = 0$. Insbesondere können wir alle Funktionen $v = v(x,t)$ der Form $v = \varphi(t)v(x)$ mit $\varphi \in C_o^\infty(0,T)$ und $v \in V = H^1(\Omega)$ einsetzen. Dies ergibt

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u(t)\varphi'(t), v)_H dt &= -\int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)_H \varphi(t) dt - \int_0^T (c_0 u(t), v)_H \varphi(t) dt \\ &\quad - \int_0^T (\alpha(t) u(t), v)_{L^2(\Gamma)} \varphi(t) dt \\ &\quad + \int_0^T (f(t), v)_H \varphi(t) dt + \int_0^T (g(t), v)_{L^2(\Gamma)} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

mit $H = L^2(\Omega)$ (Anfangsbedingung fällt weg). Unter den Integralen stehen für festes t jeweils lineare Funktionale, die dem Element $v \in V = H^1(\Omega)$ eine feste reele Zahl zuordnen, der Reihe nach

$$\begin{aligned} F_1(t): &\quad v \mapsto (\nabla u(t), \nabla v)_H \\ F_2(t): &\quad v \mapsto (c_0 u(t), v)_H \\ F_3(t): &\quad v \mapsto (\alpha(t) u(t), v)_{L^2(\Gamma)} \\ F_4(t): &\quad v \mapsto (f(t), v)_H \\ F_5(t): &\quad v \mapsto (g(t), v)_{L^2(\Gamma)} \end{aligned}$$

Alle Funktionale sind fast überall stetig, zum Beispiel

$$|F_1(t)\| \le \int_\Omega |\nabla u(t)||\nabla v|\, dx \le \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

$$\begin{aligned} |F_3(t)\| &\le \int_\Gamma |\alpha(t)||u(t)||v|\, dS \\ &\le \|\alpha(t)\|_{L^\infty(\Gamma)} \|u(t)\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\le \|\alpha(t)\|_{L^\infty(\Gamma)} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

deshalb gilt $F_i(t) \in V^* = H^1(\Omega)^*$ fast überall und

$$\begin{aligned} \|F_i(t)\|_{V^*} &\le c\|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \qquad i = 1,2,3 \\ \|F_4(t)\|_{V^*} &\le c\|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ \|F_5(t)\|_{V^*} &\le c\|g(t)\|_{L^2(\Gamma)} \end{aligned}$$

Wegen $u \in W_2^{1,0}(Q) \cong L^2([0,T], H^1(\Omega))$, $f \in L^2(Q) \cong L^2([0,T], L^2(\Omega))$ und $g \in L^2(\Sigma) \cong L^2([0,T], L^2(\Gamma))$ und den letzten Abschätzungen gehören alle Funktionale F_i zum Raum $L^2([0,T], V^*)$. mit $F := F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5$ folgt

$$-\int_0^T (u(t)\varphi'(t), v)_{L^2(\Omega)}\, dt \leq \int_0^T (F(t)\varphi(t), v)_{V,V^*}\, dt \qquad \forall v \in V = H^1(\Omega)$$

mit $F \in L^2([0,T], V^*)$. Andererseits bedeutet die letzte Beziehung gerade $u'(t) = F(t)$ im distributionellem Sinne. Damit gehört u zum Raum $L^2([0,T], V^*)$ und wegen $u \in W_2^{1,0}(Q) \cong L^2([0,T], H^1(\Omega))$ kann u als Element des Raumes $W(0,T)$ aufgefasst werden.

Die Konsequenzen daraus sind enorm: Wegen Satz 25 ist u stetig mit Werten in H, damit sind die Werte $u(0)$ und $u(T)$ als Elemente von $H = L^2(\Omega)$ erklärt. Wir schätzen nun noch die Norm von u in $W(0,T)$ ab.

$$\|u\|^2_{W(0,T)} = \|u\|^2_{L^2([0,T],H^1(\Omega))} + \|u'\|^2_{L^2([0,T],H^1(\Omega)^*)}$$

Wir schätzen die Terme einzeln ab. Aus Satz 24 folgt

$$\|u\|_{L^2([0,T],H^1(\Omega))} = \|u\|_{W_2^{1,0}(Q)} \leq c(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)}).$$

Außerdem gilt

$$\|u'\|^2_{L^2([0,T],H^1(\Omega)^*)} \leq \left\| \sum_{i=1}^5 F_i \right\|_{L^2([0,T],H^1(\Omega)^*)} \leq \sum_{i=1}^5 \|F_i\|_{L^2([0,T],H^1(\Omega)^*)}.$$

Wir wollen hier nicht alle F_i abschätzen, sondern nur das “komplizierte“ F_1:

$$\begin{aligned}
\|F_1\|^2_{L^2([0,T],V^*)} &\leq \int_0^T \|F_1\|^2_{V^*}\, dt \\
&\leq \int_0^T (c\|u(t)\|_V)^2\, dt \\
&= c\|u\|^2_{L^2([0,T],V)} \\
&= c\|u\|_{W_2^{1,0}(Q)} \\
&\leq c(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)}).
\end{aligned}$$

Die Terme F_2,...,F_5 können in ähnlicher Weise abgeschätzt werden. Insgesamt folgt daher

Satz 27 *Die schwache Lösung u der Gleichung (7.6) gehört dem Raum $W(0,T)$ an, und es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass gilt*

$$\|u\|_{W(0,T)} \leq c(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)}).$$

Die Abbildung $(f, g, u_0) \to u$ ist damit stetig von $L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega)$ in $W(0,T)$, insbesondere in $C([0,T], L^2(\Omega))$.