Technische Universität Berlin Sommersemester 2006
Institut für Mathematik
Dr. T. Stykel 9. Mai 2006

Kontrolltheorie

2. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 16.05.2006

Aufgabe 1: (Kalman-Zerlegung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $\mathrm{Rang}\,([\,B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B\,]) = r < n$. Zeige:
Es gibt eine orthogonale matrix $V \in \mathbb{R}^{n,n}$, so dass

$$V^TAV = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \qquad V^TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

wobei $A_1 \in \mathbb{R}^{r,r}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{r,m}$ und das System $\dot{x} = A_1x + B_1u$ ist steuerbar.

Aufgabe 2: (Steuerbarkeit für die LTI Systeme)

Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen für das LTI System $\dot{x} = Ax + Bu$:

a) Das LTI System ist steuerbar.

b) $\mathrm{Rang}\,([\,B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B\,]) = n$.

c) Falls $p \neq 0$ ein Eigenvektor von A^T ist, dann gilt $p^TB \neq 0$.

d) $\mathrm{Rang}\,([\,A - \lambda I,\ B\,]) = n$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3: (Steuerbarkeit)

Uberprüfe die folgenden Systeme auf Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit.

a) $\dot{x} = x + [\,0,\ 0,\ \ldots, 0,\ 1]^Tu$

b) $$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

c) $$\dot{x} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} u$$