Technische Universität Berlin Sommersemester 2006
Institut für Mathematik
Dr. T. Stykel 6. Juni 2006

Kontrolltheorie

4. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 13.06.2006

Aufgabe 1: (Sylvester-Gleichung)

Zeige, dass die Sylvester-Gleichung $AX + XB = -W$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{m,m}$, $W \in \mathbb{R}^{n,m}$ genau dann eine Lösung X hat, wenn die Matrizen

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & W \\ 0 & -B \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix}$$

ähnlich sind.

Aufgabe 2: (Stabilität)

Berechne die Eigenwerte der Matrix

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 10 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 10 \\ \varepsilon & & & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

für $\varepsilon \geq 0$. Zeige anhand dieses Beispiels mit $n = 20$ und $\varepsilon = 10^{-18}$, dass kleine Störungen in A_0 zum Stabilitätsverlust führen können.

Aufgabe 3: (Konditionszahl der Lyapunov-Gleichung)

Die *Konditionszahl* der Lyapunov-Gleichung $AX + XA^T = -W$ mit $A, W \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist definiert als

$$\kappa = 2\|A\|_F(\mathrm{Sep}(A))^{-1},$$

wobei $\mathrm{Sep}(A) = \min\limits_{\|X\|_F=1} \|AX + XA^T\|_F$ die *Separation* ist.

1. Zeige, dass $\mathrm{Sep}(A) = \|(I_n \otimes A + A \otimes I_n)^{-1}\|_2^{-1}$.
2. Sei $\tilde{X}$ die Lösung der gestörten Lyapunov-Gleichung $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{X}\tilde{A}^T = -\tilde{W}$ mit $\|\tilde{A} - A\|_F \leq \varepsilon\|A\|_F$ und $\|\tilde{W} - W\|_F \leq \varepsilon\|W\|_F$. Zeige: Ist $\varepsilon\kappa < 1$, dann gilt

$$\frac{\|\tilde{X} - X\|_F}{\|X\|_F} \leq \frac{2\varepsilon\kappa}{1 - \varepsilon\kappa}.$$

Aufgabe 4: (Stabilisierung)

Betrachte das Steuerungsproblem einer Parabolantenne

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \omega(t) \\ j\dot{\omega}(t) &= -r\omega(t) + ku(t) \end{aligned}$$

mit $k, j, r > 0$. Berechne alle stabilisierenden Zustandsrückführungsmatrizen $F \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ für das System.