Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. Tröltzsch

SS 07
18. Juli 2007

Juli – Klausur
Analysis I

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Keine Hilfsmittel (Handy, Taschenrechner, etc.) zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer schreiben! Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an bzw. **begründen** Sie ihre Antworten.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Tip: Beginnen Sie mit den Aufgaben(teilen), die Ihnen am leichtesten fallen. Die Aufgaben sind nach Themengebieten geordnet.

Die Klausur ist mit 16 von 32 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

4 Punkte

Beweisen Sie per Induktion, dass $n! \leq n^n$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt. Begründen Sie <u>jeden</u> Beweisschritt bzw. jede Umformung.

2. Aufgabe

7 Punkte (2+3+2)

(i) Untersuchen Sie die folgenden Folgen (a_n) auf Konvergenz, und berechnen Sie bei Konvergenz den Grenzwert.

a) $a_n = n\sin(n\pi)$ b) $a_n = \sqrt[n]{2^n + n^2}$

(ii) Zeigen Sie mithilfe der Definition (ϵ-N), dass die Folge (a_n) gegeben durch $a_n = n^{-2}$ konvergent ist.

(iii) Gegeben sind zwei reelle Folgen (a_n) und (b_n). Beweisen oder Widerlegen Sie: Sind (a_n) und (b_n) divergent, dann ist auch $(a_n + b_n)$ divergent.

3. Aufgabe

7 Punkte (2+3+2)

(i) Definieren Sie den Begriff 'offene Menge' für eine Menge $M \subset \mathbb{R}$!
Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ offen ist.

(ii) Existieren die folgenden Grenzwerte? Wenn ja, berechnen Sie diese.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|x|}$

(iii) Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{für } x \neq 0 \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist auf ganz $\mathbb{R}$?

4. Aufgabe

3 Punkte

Geben Sie mit Begründung an, auf welcher Menge die Funktion f, definiert durch

$$f(x) = x^{\ln x}$$

differenzierbar ist. Berechnen Sie die Ableitung dieser Funktion.

5. Aufgabe

6 Punkte (4+2)

(i) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,dx$

(ii) Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$? Berechnen Sie, falls möglich, dessen Wert.

6. Aufgabe

5 Punkte

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz!

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^n)^2}{n^{(n^2)}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n}$