# Lösungen - Analysis I - Oktober-Klausur 2007

## Aufgabe 1

(i) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst injektiv genau dann, wenn gilt: aus $f(x) = f(y)$ folgt $x = y$.

(ii) Es seien $x_1, x_2$ aus $\mathbb{N}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ also $x_1^2 = x_2^2$. Zu zeigen ist, dass dann $x_1 = x_2$ ist. Umformen von $x_1^2 = x_2^2$ ergibt $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$, also gilt $x_1 = x_2$ oder $x_1 = -x_2$. Da $x_1, x_2$ natürliche Zahlen sind, kann der zweite Fall nur für $x_1 = x_2 = 0$ eintreten. Also folgt daraus $x_1 = x_2$. Und die Injektivität ist bewiesen.

(iii) $f^{-1}(f(4)) = \{4\}$, $f(f^{-1}(\{4\})) = 4$, $f^{-1}(f(5)) = \{5\}$, $f(f^{-1}(\{5\})) = \emptyset$

## Aufgabe 2

(i)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - n + 2}{n^{12} - n^7 + 9} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^8} \frac{1 - \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4}}{1 - \frac{1}{n^5} + \frac{9}{n^{12}}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} e = 1$$

Die Folge $c_n$ ist divergent: Für die Teilfolge der geraden Glieder $(c_{2n})$ gilt $c_{2n} = 2n$, d.h. diese Teilfolge divergiert, damit auch die ganze Folge.

(ii) Die Aussage ist wahr:

Indirekter Beweis: Wir nehmen an, dass $(a_n)$ konvergent, $(b_n)$ divergent, aber $(a_n + b_n)$ konvergent ist. Nach den Sätzen über konvergente Folgen ist damit auch die Folge mit den Gliedern $(a_n + b_n) - a_n = b_n$ konvergent, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

## Aufgabe 3

(i) Seien $x, y \in [1, \infty)$. Dann gilt

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| \leq |x-y| < \epsilon \Leftrightarrow |x-y| < \epsilon.$$

Das heisst, für jedes $\epsilon > 0$ gilt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $y$ mit Abstand $\delta = \epsilon$ von $x$.

(ii)

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 3}{2x - 5} = -1$$

Für den dritten Grenzwert muss man links- und rechtsseitigen Grenzwert einzeln betrachten:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{e^x - 1}{|x|} = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{e^x - 1}{|x|} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{e^x - 1}{-x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{e^x}{-1} = -1$$

Da diese beiden nicht übereinstimmen, existiert der Grenzwert nicht.

(iii) Wir untersuchen die Funktion $f(x) = \sqrt{\sin^2 x + x^2} - 1$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ und suchen dort nach Nullstellen. Die Funktion $f$ ist eine stetige Funktion, da das Argument der Wurzelfunktion nicht negativ ist. Um den Zwischenwertsatz anzuwenden, berechnen wir ein paar Funktionswerte: $f(\pi) = \pi - 1 > 0$, $f(-\pi) = \pi - 1 > 0$, $f(0) = -1 < 0$. Damit existieren in den Intervallen $(-\pi, 0)$ und $(0, \pi)$ jeweils eine Nullstelle der Funktion $f$. Diese Nullstellen sind auch Lösungen der Gleichung.

## Aufgabe 4

(i) Die Ableitungen der Funktion $f(x) = \sin(x^2)$ sind:

$$f'(x) = 2x\cos(x^2), \quad f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2), \quad f'''(x) = -12x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2)$$

Deren Werte an der Stelle $x_0 = 0$ sind $f(0) = 0$, $f'(0) = 0, f''(0) = 2$. Damit bekommt man das Taylorpolynom

$$T_2(x) = x^2.$$

(ii) Das Restglied hat die Gestalt

$$f(x) - T_2(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi)(x^3)$$

mit einem $\xi$ zwischen 0 und $x$. Wir schätzen erstmal die Ableitung $f'''(\xi)$ ab

$$|f'''(\xi)| = \left|-12\xi\sin(\xi^2) - 8\xi^3\cos(\xi^2)\right| \leq \left|12\xi\sin(\xi^2)\right| + \left|8\xi^3\cos(\xi^2)\right| \leq 12|\xi| + 8|\xi|^3 \leq \frac{12}{2} + \frac{8}{8} = 7.$$

Damit bekommen wir eine obere Schranke für das Restglied

$$\left|\frac{1}{6} f'''(\xi) x^3\right| \leq \frac{7}{6}|x|^3 \leq \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{48} \leq \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$$

## Aufgabe 5

$$\int_0^2 [x]\,dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx = 1$$

$$\int 2x\,e^{-x^2}\,dx = \int -e^u\,du = -e^u + c = -e^{-x^2} + c \quad (\text{Substitution } u = -x^2)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx = [\ln(x)]_1^2 - [\ln(x+1)]_1^2 = \ln 2 - 0 - \ln 3 + \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 3$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{|x|}\,dx = \int_{-1}^0 \sqrt{-x}\,dx + \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = [-\frac{2}{3}(-x)^{3/2}]_{-1}^0 + [\frac{2}{3}(x)^{3/2}]_0^1 \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

## Aufgabe 6

Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{\sqrt{n}}(x-2)^n\right|} = |x-2|\frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} \to |x-2| \text{ für } n \to \infty$$

Daraus folgt:

- Die Potenzreihe ist konvergent für $x$ mit $|x-2| < 1$ bzw. $x \in (1,3)$.
- Die Potenzreihe ist divergent für $x$ mit $|x-2| > 1$ bzw. $x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty)$.

Es bleibt also noch das Verhalten in den Punkten $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ zu untersuchen. Für $x_1 = 1$ sieht die Potenzreihe so aus: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^n$, diese Reihe ist konvergent (Leibniz-Kriterium). Für $x_2 = 3$ erhalten wir die divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Also:

- Die Potenzreihe ist konvergent in $x = 1$.
- Die Potenzreihe ist divergent in $x = 3$.

Insgesamt: Die Potenzreihe ist konvergent in $x$ genau dann, wenn $x \in [1,3)$.