SS 2007 Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch Fakultät II
Dr. Daniel Wachsmuth Institut für Mathematik

2. Übungsblatt Analysis I

Hausaufgaben: Bitte auf schreiben Sie auf die Abgabe Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium, in das Sie gehen.

1.Mai: Am 1. Mai ist keine große Übung. Bitte geben Sie die Aufgaben **ausnahmsweise** in Ihrem Tutorium vom 2. bis zum 4. Mai ab.

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 24.04.07 besprochen]

1. Wir beweisen hier einige Aussagen, die eigentlich selbstverständlich aussehen, aber hier erst einmal aus der Definition der natürlichen Zahlen mittels induktiver Mengen bewiesen werden müssen.
   (a) Die Summe und das Produkt zweier natürlicher Zahlen sind wieder natürliche Zahlen.
   (b) Jede natürliche Zahl $n \geq 1$ hat einen Vorgänger in den natürlichen Zahlen, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \; \exists m \in \mathbb{N} : m + 1 = n$.
   (c) Beweisen Sie: Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element (Wohlordnungsprinzip).
2. Wir beweisen mit Induktion, dass n beliebige Punkte in der Ebene immer auf einer Geraden liegen.
3. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion den Binomialsatz: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 25.04.07 bis 27.04.07 besprochen]

1. Zeigen Sie, dass es keine natürliche Zahl zwischen 0 und 1 gibt.
2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen $\forall n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion!
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}, \quad \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}\,,\ a \neq 0, 1$
   (c) $2^n > n\,,\ n \geq 1, \quad 2^n > n^2\,,\ n \geq 5.$
3. Finden und Beweisen Sie eine Formel für die Zeilensummen im *Dreieck der ungeraden Zahlen*:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& 1 &&&& \\ &&& 3 && 5 &&& \\ && 7 && 9 && 11 && \\ & 13 && 15 && 17 && 19 & \\ 21 & \dots &&&&&&& \end{array}$$

Hausaufgaben: [abgeben am 2.5.07 oder später]

1. Es sind $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{R}$ mit $k > 0$ gegeben. Weiter ist $n + k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann gilt $k \in \mathbb{N}$. (3 Punkte)
2. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: (6 Punkte)

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3} n(4n^2 - 1), \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Berechnen Sie die folgenden Mengen. Begründen Sie Ihre Antwort. Hier könnte das Archimedische Prinzip helfen. (6 Punkte)

$$\text{(a)} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [0, \tfrac{1}{n}] \qquad \text{(b)} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\tfrac{1}{n}, 1] \qquad \text{(c)} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}[$$

4. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. (2 Punkte)

$$\frac{1+i}{8+i}, \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{21}, \frac{i^3}{i^2 - i^4}, \sum_{n=1}^{1234567890123456} i^n.$$